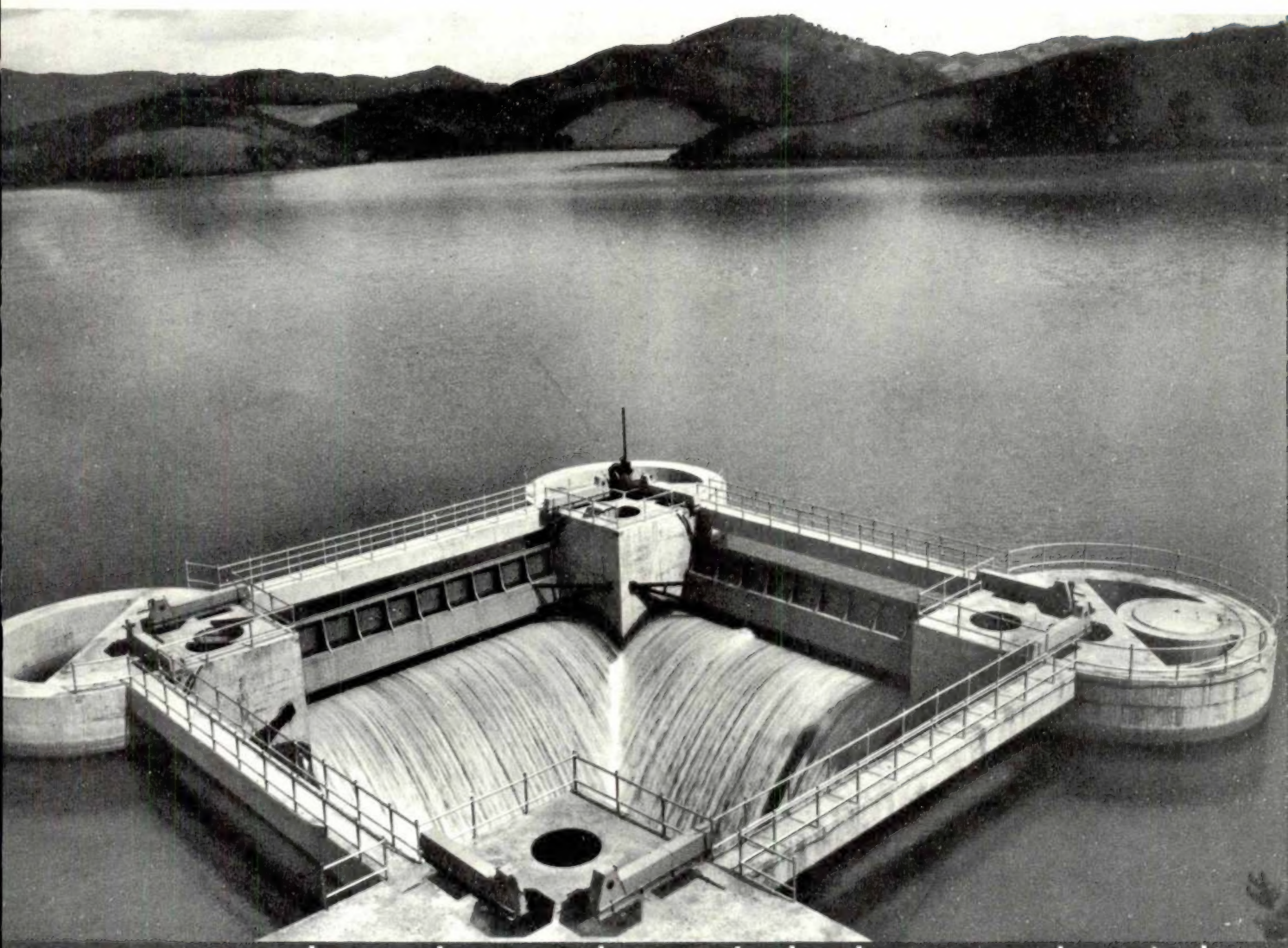
técnica



032

associação dos estudantes do instituto superior técnico

novembro 1963 revista de engenharia

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA

S. A. R. L.

SEDE

Rua de Alexandre Herculano, 244 — PORTO

TELEFONES: 2 76 76, 77/78/79 — Est. 90

DELEGAÇÃO

Rua Rosa Araújo, 35 — LISBOA

TEL.: 73 11 81 82 83 84 85 86 - 73 33 33 - 18491

●

ELECTRICIDADE DO LINDOSO
E DAS CENTRAIS DO FREIXO
E DA CACHOFARRA

●

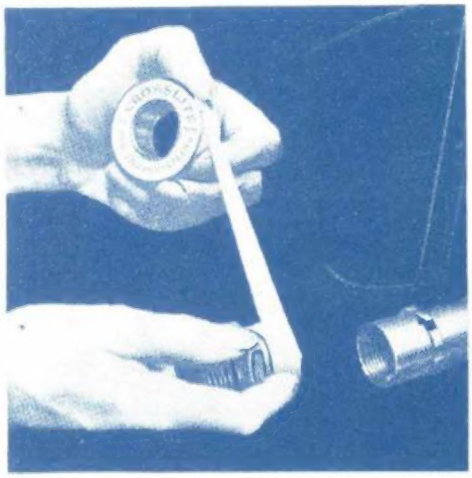
A UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA distribui, pela mais extensa rede de alta tensão em Portugal (cerca de 2 500 km), energia eléctrica em 70 concelhos, nos distritos de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU, LEIRIA, SETÚBAL e ÉVORA.

TEM CANALISAÇÕES DE VAPOR NA SUA FÁBRICA ?
TEM TRANSPORTE DE GASES ?
TEM TRANSPORTE DE FLUÍDOS CORROSIVOS ?

Então tem problemas nas tubagens:

1 — Fugas 2 — Corrosão 3 — Calcinação das juntas

AO SEU SERVIÇO — a última conquista da química neste sector:



1 bobine: ca. 14 mts. comprimento
ca. 1,5 cm. largura

CROSSLITE — Fita vedante para ligações tubulares à base de Polytetrafluoreto de Etilene

- Adesão e cobertura perfeita de todas as irregularidades da rosca.
- Insolúvel e **absolutamente inerte** ao ataque químico de qualquer substância.
- Não contamina as substâncias em processo através da tubagem.
- Resiste a temperaturas de — 100º C a + 300º C.
- Preserva impecàvelmente o sistema roscado ao fim de meses ou anos de trabalho.

Um produto de

HENRY CROSSLEY LTD. — Bolton — ENGLAND

Todos os acessórios para vedação

Representante exclusivo: SIDROL — Sociedade Importadora de Drogas, Lda.
Calçada de Monchique n.º 3 — PORTO — Telefs. 27826 e 32055

TÉCNICA

Ano XXXVIII - N.º 332 Novembro de 1963

Redacção e Administração: AVENIDA ROVISCO PAIS, I.S.T. * LISBOA-1. * TELEF. 77 01 44 (Linha 50)

CORPO REDACTORIAL

J. M. VIEGAS GONÇALVES
J. F. GOMES DE PINA
F. G. KNOPFLI BATORÉU
A. M. L. ESTEVES BRINCA

NUMERO AVULSO 15$00

ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	37$50	60$00	110$00
Ultramar Português e Espanha	—	65$00	120$00
Estrangeiro	—	70$00	130$00

PUBLICAÇÃO PERIÓDICA MENSAL

EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ESTUD. DO I.S.T.

COMPOSTO E IMPRESSO NA
Tip. JORGE FERNANDES, L.DA
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Descarregador de superfície da albufeira de Arade — D. G. S. H.

Págs.

Semana de recepção aos novos alunos — Palestra proferida pelo Prof. José Quintino Rogado 61

Engenharia de Tráfego
Por Alberto Dias Ferreira do Nascimento 67

Sobre os movimentos vibratórios de sistemas de um grau de liberdade com elasticidade do tipo k (x ± x)
Por Jorge Neves da Silva 77

Notas informativas — **Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional** . . 100 e 108

Princípios Científicos da Formação de Películas
Por Maria Fernanda de Castro 101

Flexão simples — Contribuição para a apresentação do cálculo em relação à rotura (Fase III)
Por G. Faria de Vasconcelos 109

Do Mundo Técnico 137

Biblioteca 141

OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

Índice Alfabético dos nossos anunciantes

A — Pág.

Agência Comercial, Lda. IV
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd. . . XXXVIII
Agro-Mecânica XXVI
Asea Eléctrica Ld.ª XXX
Auto-Lusitânia XXXII

B

Burrougs XVIII

C

CIDEX IV
Cimento Secil . . . . . 2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos . . VIII
Companhia Portuguesa de Fornos Eléctricos IX
Companhia Portuguesa de Trefilaria XXXIV
Companhia União Fabril . . . XIV e XV
C. Santos, Ltd.ª . . . . . VI e XLIV
Crosslite . . . . . 2.ª da capa
Cummins XLII

E

Electro-Arco, Ltd.ª XXXIV
Emílio de Azevedo Campos & C.ª, Ltd.ª XXVI
Empresa de Cimentos de Leiria . . XLIV
Empresa Electro Cerâmica XXXIX
Empresa de Produtos Asfálticos. . . X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ltd.ª . . . . . 3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações XXVIII
Empresa de fundações A. Cavaco . XXXIV

F

Fábrica Portugal II
Fanafel XVI
Fundações Franki, Lda. I

G

General Electric . . . . . XXIV e XXV

H

Harker Sumner & C.ª, Ltd. XXXV

I

I. C. I. XXXVII
Impermeábilis XXXIV
I. S. T. XLV

J — Pág.

Jayme da Costa, Lda XIX

L

Leopoldo Shiroi XXXVI

M

Metalúrgica Duarte Ferreira XXXIV
Mobil Oil Portuguesa . . . . . 4.ª da capa
Modern Office XLV
Monteiro Gomes, Lda. XL

N

Novobra, Lda. XXX

O

Orlando Fernandes XVI

P

Philips . . . . . XVII e XX
Pimentel & Casquilho, Ltd.ª III

Q

Quimicor, S.A.R.L. XXVII
Química Hoechst XXIII

S

S.E. Moniz da Maia & Vaz Guedes, L.da XIII
Siemens XXXIII
Soabal, Ltd. XII
S. Com. de Isolamentos de Cortiça XXXV
SMEIA XXXI
Sociedade Comercial Luso-Italiana XLI
Soc Const. Amadeu Guadêncio . . XXXVI
Sociedade Portuguesa Cavan VIII
Sondagens e Fundações, A Cavaco . XXXIV
Sondagens Ródio, Ltd.ª XXXVI
Standard Eléctrica VII
S. T. E. T. . . . . XXI e XXII

T

Tesa-Molle XXVIII
Telemec XLII

U

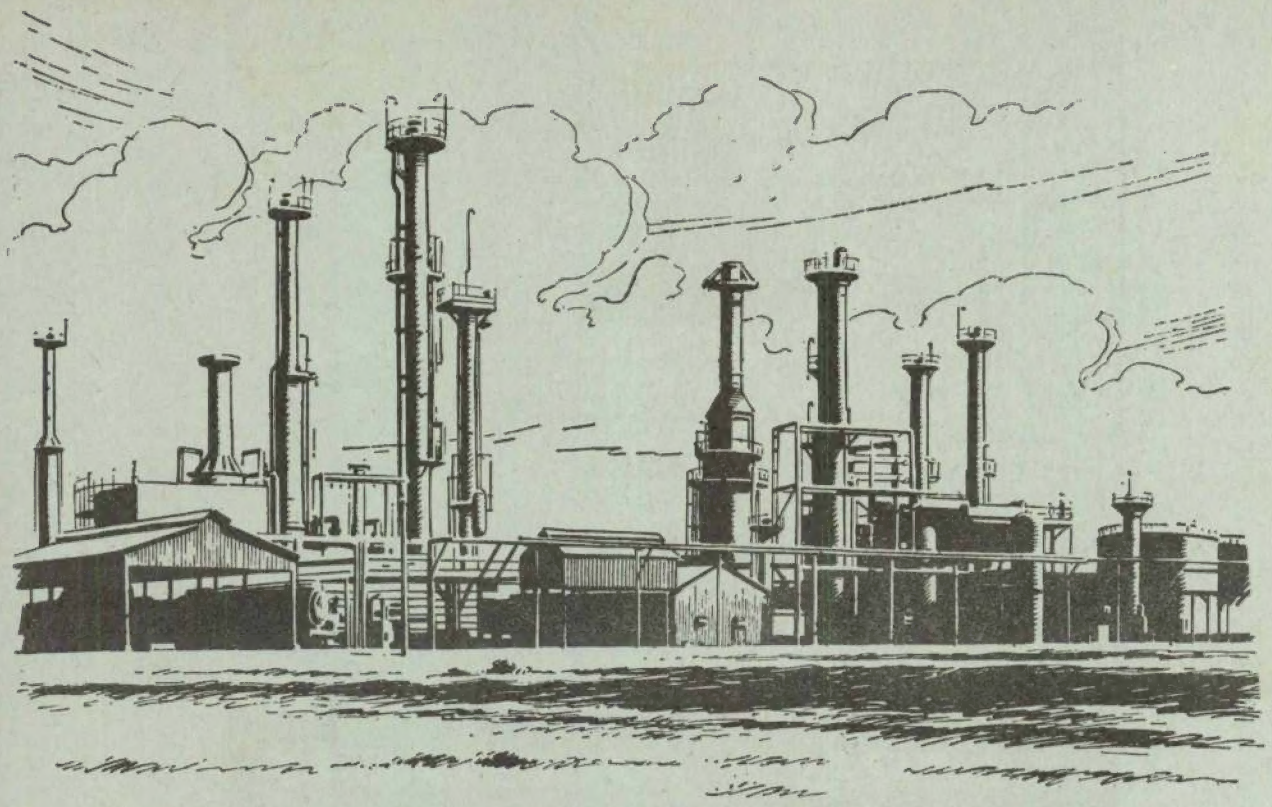
União Eléctrica Portuguesa . . . . . 2.ª da capa

V

Vasco Pessoa, Lda. XXX
Von Roll V

W

Wild Portugal, Lda. XXIX
W. Schmidt XXXIX



Refinaria da Sonarep
(Matola — Moçambique)

Assente sobre

ESTACAS FRANKI

FUNDAÇÕES FRANKI, L.DA

Rua Braamcamp, 13, 3.°
LISBOA

★

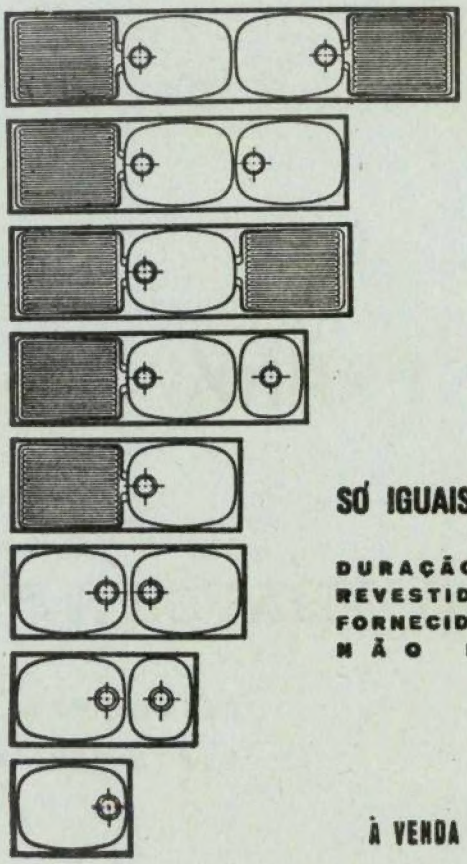
Telef. PPC 73 41 12
End. Teleg. «FRANKI»

USE NA SUA COZINHA UM ELEGANTE LAVA-LOUÇAS DE AÇO INOXIDÁVEL

CONCEBIDO PELA

FABRICA PORTUGAL

PARA MODERNIZAR OS LARES DE PORTUGAL



APRESENTADOS EM

8 MODELOS

"STANDARD"

EXECUTAM-SE FORA DE SÉRIE, MODELOS ESPECIAIS PARA GRANDES INSTALAÇÕES

SÓ IGUAIS AOS MELHORES ESTRANGEIROS

DURAÇÃO ILIMITADA • HIGIÉNICOS
REVESTIDOS DE ISOLAMENTO ESPECIAL
FORNECIDOS COM SIFÃO DE SEGURANÇA
NÃO PARTEM A LOUÇA

À VENDA NAS BOAS CASAS DA ESPECIALIDADE

PIMENTEL & CASQUILHO, L.DA

QUASE 40 ANOS AO SERVIÇO DA ENGENHARIA PORTUGUESA

GRANDE SORTIDO DE INSTRUMENTOS DE PRECISÃO, CIENTÍFICOS E INDUSTRIAIS

RUA JARDIM DO REGEDOR, 24, 2.º
LISBOA
TELEF.: 32 43 14 — 32 42 48 ✦ TELEG.: TECNA

Bombas centrífugas «PACIFIC»

Construídas por

Batignolles - Chatillon

Especialmente destinadas para:

— Petróleos
— Indústrias químicas
— Construções navais
— Centrais eléctricas
— Alimentação de caldeiras
— Etc., etc.

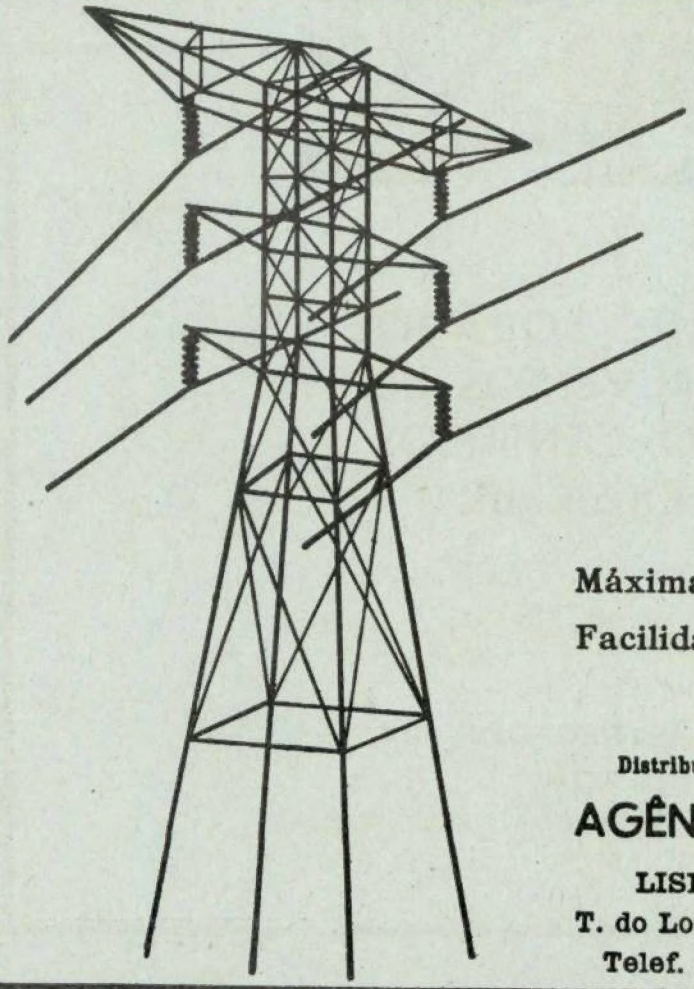
Sob as condições de funcionamento seguintes:

— Débitos: 1 m³/h a 10.000 m³/h
— Pressões: altas e baixas
— Temperaturas: −180° C + 500° C
— Líquidos: corrosivos ou não

Para estudos e orçamentos, consultar o representante em Portugal:

CIDEX — Comércio Internacional
e Representações Industriais, Lda.

Av. Casal Ribeiro, 46-2.°/Telef. 73 53 07/LISBOA 1



METALIZAÇÃO A FRIO

NEODON

NEODON + ZINCO =
NEODONZINKGRUND

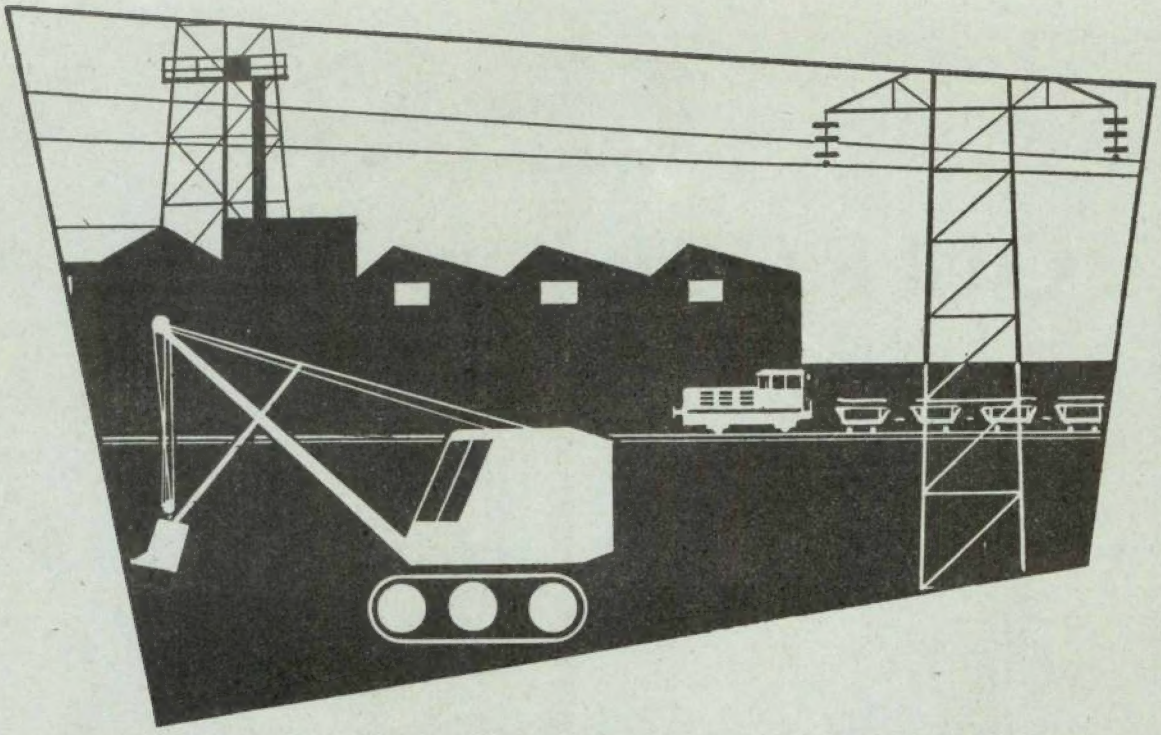
Máxima protecção
Facilidade de aplicação

Distribuidores exclusivos:

AGÊNCIA COMERCIAL, L.DA

LISBOA	ÉVORA
T. do Loureiro, 3	R. da República, 93
Telef. 4 90 54	Telef. 2 33 63

VON ROLL
Máquinas
para as indústrias
de produtos
químicos,
alimentares
e cerâmicos
aço esmaltado
fundição
esmaltada
Fábricas de Klus (Suiça)
VON ROLL S.A.
Representantes
em Portugal:
Socotel, L. da
Rua de
Sá da Bandeira,
651-4.º Esq.
Porto-Tel. 27013



MERCEDES-BENZ

MOTORES INDUSTRIAIS DIESEL

MOTORES PARA TODAS AS APLICAÇÕES INDUSTRIAIS
FAMOSOS EM TODO O MUNDO PELA SUA GRANDE ROBUSTÊS, ECONOMIA
DE CONSUMO E FACILIDADE DE MANUTENÇÃO
MODELOS DESDE 15 A 2.500 H. P.

EM ARMAZÉM:

MODELO M B 841 B	25 H. P. — 1.000 R. P. M.
MODELO M 202 B	55 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 203 B	90 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 204 B	120 H. P. — 1.200 R. P. M.

OUTROS MODELOS PARA ENTREGA MUITO RÁPIDA

MOTORES A 4 TEMPOS · ARREFECIMENTO POR ÁGUA
ARRANQUE A AR COMPRIMIDO OU ELÉCTRICO

REPRESENTANTES C. SANTOS LDA. — DIVISÃO MARÍTIMA E INDUSTRIAL

29, AV. DA LIBERDADE, 41 — LISBOA
160, R. DE S.TA CATARINA, 168 — PORTO

Standard Electrica S.A.R.L.

Associada da

INTERNATIONAL TELEPHONE AND TELEGRAPH CORPORATION

DE NOVA YORK

TELECOMUNICAÇÕES

ELECTRÓNICA

AV. DA INDIA — LISBOA

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

CAVAN

SOCIEDADE PORTUGUESA

✱

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS

COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

✱

RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A
TELEF. 47812-50129
LISBOA

COMPANHIA PORTUGUESA DE FORNOS ELÉCTRICOS

PRODUTORA DE

FERRO GUSA

FERRO LIGAS

FERRO-MANGANÊS

SÍLICO-MANGANÊS

FERRO-SILÍCIOS

15 % - 25 % - 45 % - 75 % - 90 %

CARBONETO DE CÁLCIO

CIANAMIDA CÁLCICA

PASTA PARA ELÉCTRODOS

E EM MONTAGEM

GRAFITE

FÁBRICAS
CANAS DE SENHORIM
Telefone 6 72 22

SEDE
Largo de S. Carlos, 4 2.º — LISBOA
Telefones 32 53 43 - 3 55 56 - 36 89 89

Celulite

ISOLAMENTO
TÉRMICO DAS
CONSTRUÇÕES

PAVIMENTOS
*
TECTOS
*
PAREDES
*
CÂMARAS
FRIGORÍFICAS
*
ISOLAMENTOS
INDUSTRIAIS

Terraços e pavimentos isolados com CELULITE no edifício da Comp.ª de Seguros Fidelidade — P. das Águas Livres — Lisboa

SETH, LDA. • RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º • TEL. 73 01 56 — LISBOA

Para impermeabilizar terraços,
paredes, fundações, etc.

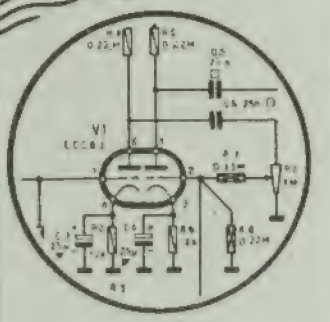
COLAGEM DE
TACOS DE MADEIRA

TELEF. 73 0156 TELEG. EPALDA — LISBOA

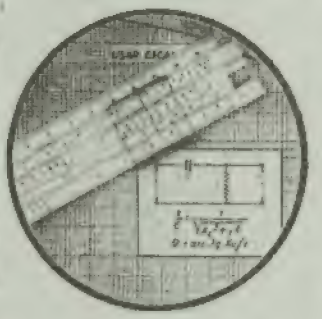
EMPREZA DE PRODUCTOS ASFÁLTICOS
IMPERMEABILISADOR
IMEPA
RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º-LISBOA

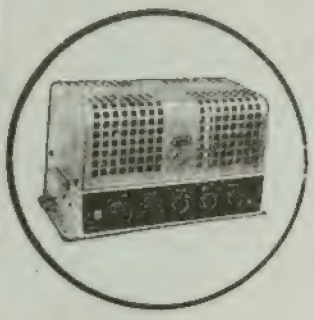
FÁBRICA EM SACAVÉM

EQUIPAMENTO DE AMPLIFICAÇÃO DE SOM



BEM CONCEBIDO BEM CALCULADO CONSTRUIDO





LESA

A grande marca italiana

Representantes em Portugal

TELECTRA

EMPRESA TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS ELÉCTRICOS, S. A. R. L.

Rua Rodrigo da Fonseca, 103, r/c
LISBOA — Tel. 68 60 72

Rua Sá da Bandeira, 766-1.º E.
Tel. 2 48 18 — PORTO

AÇO TOR

O AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA
PARA BETÃO ARMADO COM
MAIOR VENDA NO MUNDO

TENSÃO DE SEGURANÇA 2 400 Kg/cm²
SEM GANCHOS

Especifique
AÇO TOR
com o símbolo

SOABAL – SOCIEDADE DE AÇOS PARA BETÃO ARMADO, LDA.
RUA JOAQUIM BONIFÁCIO, 2, 1.º — TELEF. 4 05 66 — LISBOA

TÉCNICA

CORPO REDACTORIAL: J. M. VIEGAS GONÇALVES, J. F. GOMES DE PINA, A. M. L. ESTEVES BRINCA

Ano XXXVIII — N.º 332 Novembro de 1963

C. D. U. 378.147

SEMANA DE RECEPÇÃO AOS NOVOS ALUNOS

Palestra proferida pelo Prof. José Quintino Rogado

Ex.mo Senhor Director do Instituto Superior Técnico
Ilustres colegas, senhores alunos, minhas senhoras e meus senhores:

Quando, há quinze dias atrás, o vice-presidente da A. E. me convidou para dizer algumas palavras integradas na semana de recepção aos novos alunos, hesitei antes de aceitar a incumbência, não levado pelo desejo de a ela me furtar, mas por que a achava eriçada de dificuldades.

Na verdade, destinando-se os novos alunos a ramos de engenharia tão diferentes e dispondo eu de alguma experiência apenas na minha especialidade, via-me forçado a extrapolá-la, para que o tema que escolhesse pudesse ter a generalidade necessária a uma cerimónia desta natureza.

Hesitei, mas aceitei o amável convite da A. E. e aqui estou convencido de que serei capaz de encontrar tal tema.

Tenho esperança que V. Ex.as, no final destas palavras, confirmem este meu ponto de vista. Aos colegas e finalistas peço um pouco de paciência, pois irão ouvir coisas possìvelmente já conhecidas.

* * *

Pareceu-me que aos novos alunos interessaria esclarecer certos aspectos comuns à estrutura dos cursos de Engenharia.

Farei por isso algumas breves considerações sobre o curso geral e as aplicações.

Nos estudos físico-químicos que ides frequentar nos primeiros anos do curso, o objecto é a Natureza concreta inanimada. O fenómeno biológico, o fenómeno social e o fenómeno político não são aí considerados.

Por outro lado, o instrumento ou ferramenta necessária para perfurar o muro de incompreensão de que a Natureza inerte se cerca, a civilização não encontrou outro melhor que não fosse a Análise Matemática. Não deveis por isso estranhar que, nos primeiros anos, ela vos seja abundantemente ministrada. E, perante tanta abstracção a que vos tereis de guindar, perante tanta coisa abstrusa que vos ensinarão, poderá acontecer que a dúvida da utilidade ou necessidade de tais estudos se vos ponha com frequência. Todavia, para além do interesse futuro deste ou daquele algoritmo, desta ou daquela teoria, avulta a utilidade imediata de contribuirem para a formação da mentalidade analítica que é condição *sine qua non* para poderdes prosseguir, compreendendo-os, os estudos físico-químicos básicos do curso.

A introdução das ciências matemáticas no início do curso traduz, pois, a intenção de desenvolver, nos estudantes, a atitude mental apropriada para o exercício da profissão de engenheiro

e, simultâneamente, corresponde à necessidade de pôr à sua disposição a ferramenta e a linguagem necessárias aos estudos ulteriores.

Além deste grupo de disciplinas básicas, ministra-se também, no I. S. T., um outro grupo de cadeiras divididas por especialidades que se denominam usualmente *Aplicações*. Nelas se ensina a utilizar os conceitos físico-químicos adquiridos nas disciplinas básicas e se estruturam os conhecimentos tecnológicos que constituem, por assim dizer, a arte do engenheiro.

Não deve porém pensar-se que aquilo que se ensina nas Aplicações se há de limitar ao enunciado de regras práticas derivadas de conclusões anteriormente estabelecidas pelas ciências físico-químicas, isto é, que as aplicações pretendam apenas apresentar de forma expedita e utilitária os resultados da Ciência. Ou ainda que as aplicações se resumam a um estendal de preceitos empíricos mais ou menos infalíveis.

Pelo contrário, as aplicações desenvolveram-se e, recentemente, evoluiram à custa de verdadeiro espírito científico, indo buscar ao método científico e à sua disciplina a inspiração segura para caminhar. São por isso, hoje em dia, verdadeiras disciplinas científicas, quanto ao método. De tal modo que a distinção entre Ciência pura e Tecnologia reside apenas na diferença dos objectos imediatos que lhes interessam a cada uma delas.

As tecnologias estudam os fenómenos *industrialmente viáveis*, não só viáveis, porque se relacionam com a satisfação das necessidades humanas, como também porque é possível utilizá-los, tomando em consideração os meios materiais disponíveis. Assim, nas aplicações, delimita-se o domínio dos fenómenos a estudar aqueles que, para dada época, são úteis e eficazes; ponto de vista que traduz uma atitude *prática* opondo-se à atitude necessàriamente *teórica* da Ciência.

Todavia, as relações entre Ciencia e Tecnologia são ainda mais complexas e interessantes. Senão, vejamos:

Nos princípios do século actual, no domínio das aplicações, implìcitamente se desenhou o pressuposto que todas as leis que regem os fenómenos físico-químicos básicos eram conhecidas com suficiente rigor, ou podiam sê-lo, em tempo útil. Tratava-se de um ponto de vista optimístico em face da Ciência, mas fundamental para estruturar a Tecnologia dentro do espírito e método científicos, em oposição ao ponto de vista impírico anterior que estabelecia estar o conhecimento científico demasiado aquém ou além da realidade para merecer a pena a ele recorrer. Segundo este empirismo industrial dos nossos avós, era preferível e mais seguro acumular dados e preceitos que traduzissem, uns a verdadeira informação da realidade, os outros a forma mais conveniente de a tornar útil. Dados e preceitos esses que, na maioria dos casos, eram apenas válidos dentro da tecnologia onde haviam sido, ao longo dos anos, cuidadosamente coleccionados, constituindo como que um património próprio dos respectivos especialistas, então chamados práticos.

Infelizmente, para a estruturação científica das Aplicações, muito frequentemente, a Ciência fornecia apenas a descrição e explicação de fenómenos isolados, isto é, artificialmente segregados da Natureza e mesmo certas leis básicas haviam sido estabelecidas experimentando em condições intencionalmente muito simples. Daí acontecer que, quando se pretendia utilizar o conhecimento científico, extrapolando-o às condições em que os fenómenos ocorriam nos processos tecnológicos, os esquemas simplificados da Ciência eram inoperantes, perante a interacção acentuada de uma multidão de fenómenos que só utòpicamente podiam ser considerados simples e independentes.

Esta verificação não invalidava o conhecimento científico, o que mostrava é que as leis físico-químicas que a Ciência pudera descobrir e que, sendo necessárias, constituiam o único conhecimento positivo da Natureza, intervinham, em qualquer fenómeno não isolado, integradas em estruturas tão complexas que importava, tanto conhecê-las, a elas às leis, como dominar as particularidades estruturais exibidas pelo fenómeno. Tarefa para a qual ninguém estava preparado uns cem anos atrás.

Perante esta situação dois caminhos se apresentaram às Aplicações: Manter-se no empirismo ingénuo, renunciando, talvez por mais um século, à Ciência, ou recorrer à experimentação aplicada.

Foi esta última alternativa que, em geral, se adoptou. A experimentação aplicada surgiu então por toda a parte e em todos os domínios das aplicações. Nela, o próprio fenómeno que interessava à

Tecnologia era repetido em condições tão próximas quanto possível, senão idênticas, às dos processos industriais e, deste modo, estudado em globo com maior ou menor pormenor, servindo as leis básicas da Ciência como chaves interpretadas, mas não tendo qualquer interesse como instrumentos quantitativos.

Perante tal estado de coisas, nasceu todo um cortejo numeroso de *teorias fenomenológicas*, directamente surgindo do labor da experimentação aplicada, as quais vitoriosamente previam, mediam e permitiam controlar os fenómenos industriais e eram estrondosamente apresentados como a ciência nova.

Porém, essas teorias fenomenológicas, na essência e rigorosamente não eram mais que o resultado da utilização de um empirismo exaustivo e esclarecido. Com efeito, os nossos empíricos avós pacientemente coleccionavam e transmitiam os resultados das gerações passadas, acrescidos aqui e acolá da experiência própria, sem se preocuparem com o fluir do tempo. Os empíricos da nossa época, pelo contrário, senhores de meios poderosíssimos, extraíam dos processos industriais catadupas de conhecimentos, em curto lapso de tempo, num lustro, por exemplo, mas, do mesmo modo, os resultados que obtinham eram meras súmulas de um sem número de experiências. No primeiro caso, era-se empírico por atavismo, no segundo, praticava-se o empirismo esclarecido.

Havia, portanto, muito de falacioso nas vitórias das teorias fenomenológicas e assim foi que, aí pelos anos trinta, certas brechas começaram a surgir no empirismo moderno.

A concorrência industrial obrigava ao progresso, à eficácia sempre maior e, nas caves do colossal edifício do empirismo, os técnicos de então não encontravam senão pseudo-leis, válidas para os domínios de aplicação do lustro transacto. Evidentemente que novas experiências, nas condições actualmente válidas, tinham de ser e foram realizadas, para que novas teorias fenomenológicas completassem ou substituíssem as anteriores e o progresso se cumprisse. Porém, este fazer e refazer de leis, tantas vezes repetido, aparecia cada vez mais dispendioso. O progresso obtinha-se muito caro, estruturado de tal forma. E por toda a parte, vozes pessimistas se levantaram, chamando a atenção para a vacuidade falaz da ciência aplicada.

Simultâneamente, outras vozes misturavam-se às primeiras, para mostrar quão perturbador era a existência de legiões imensas de especialista que serviam a ciência aplicada. Fechada em compartimentos mais ou menos estanques, utilizando o conhecimento científico de forma mitigada, a formação que a ciência aplicada exigia aos seus cultores era muito estreita e, logo que se tornava necessário renovar ou mudar de domínio de investigação, não se encontrava, entre eles, gente capaz de *reconversão*. Principalmente, a sua imaginação científica encontrava-se atròsmente atrofiada. Assim, os E.U.A., campeões da ciência aplicada, viam-se forçados à importação de mentalidades científicas com capacidade para traçar novos rumos, graças à cultura e imaginação científicas de que eram portadoras, porque não haviam sacrificado à *teoria fenomenológica*, vivendo principalmente na velha Europa, berço da ciência moderna, onde certos baluartes científicos continuavam alheios à espantosa influência do empirismo esclarecido, que, nos Estados Unidos, se instalara, todo poderoso, nas próprias universidades.

Foi então que, por toda a parte, se começou a ouvir falar contra a cultura especializada excessiva, muitas vezes sem que houvesse conhecimento claro da questão em si mesma. Quarenta anos atrás, assistira-se à reacção dos práticos contra o orgulhoso cientismo teorizante, esquemático e superficial que evoluía despegado da complexa realidade experimental, de modo que se não sabia agora bem que posição tomar.

Entretanto, felizmente a Ciência progredira e, quando, pouco a pouco, os cultores das tecnologias para ela de novo se curvaram, espantaram-se de duas coisas aparentemente opostas, a saber:

— que a ciência atingira tal complexidade, recorria a métodos analíticos tão evoluídos, que se tornara incompreensível para os não iniciados e apresentava vaga semelhança com aquele restrito e simples conjunto de conhecimentos científicos que lhes era, a eles técnicos, familiar. No estado actual, a ciência abordava e explicava muitos dos complexos fenómenos que, em vão, a ciência aplicada tentara dominar.

— que todo esse progresso fora possível partindo das leis básicas já conhecidas da investigação aplicada, mas que esta considerara, anos atrás, inoperantes e utilizara apenas como meras chaves interpretativas.

Vejamos com um pouco de maior detalhe o que se passava, nos anos quarenta e cinquenta, que motivava estas conclusões.

Na verdade, fora apenas o seguinte: Alguns sectores da investigação aplicada haviam estabelecido estreitos laços com os cientistas, nomeadamente com os das Universidades e, por várias formas e diversas oportunidades, haviam utilizado, directamente, o seu cabedal científico na investigação aplicada. Em contrapartida, laboratórios e centros de investigação científica tomavam como seus certos aspectos dos problemas industriais. Deste modo, os poderosos meios materiais que inicialmente se haviam posto à disposição da investigação aplicada estavam, pouco a pouco, a transferir-se para a investigação científica, até muitas vezes, pelo menos na aparência, desinteressadamente.

A guerra mundial, de que se saíra, habituara certas indústrias e as Universidades a realizar um esforço comum e parecia evidente que tal conúbio teria que alargar-se, para que o progresso não fosse frenado, mas pelo contrário, ainda mais se acelerasse.

Ocorre então indagar do porquê do extraordinário sucesso da investigação científica, a par da falência da investigação aplicada.

A resposta reside na diferente forma como a experiência foi utilizada e estudada por esses dois domínios de investigação.

Com efeito, a atitude simplista da investigação aplicada, perante a complexidade dos fenómenos naturais, consistia em tomá-los como um todo, abandonando o princípio cartesiano da divisão da dificuldade, por acreditar que leis globais úteis se poderiam assim descobrir, sem elaborar teoria científica explicativa. Era a forma mais cómoda de proceder; não exigia sequer o emprego de análise matemática muito evoluída. Umas lambuzadelas da teoria das funções e da teoria das probabilidades bastavam na maioria dos casos.

Em contrapartida, os cientistas, apercebendo-se, pelos seus contactos cada vez mais frequentes e intímos com as aplicações, que se tornava necessário caminhar de complexidade em complexidade crescente, amaram-se com a vastíssima panóplia analítica das ciências matemáticas (cujo progresso, em muitos casos, escorvaram) e, partindo das leis simples indiscutíveis, construiram modelos mentais altamente evoluídos que explicavam os fenómenos naturais complexos. Quer dizer, mantendo-se fiéis ao princípio científico do caminhar do simples e sabido para o complicado, não recuaram (porque para tanto dispunham de cultura bastante) perante a utilização exaustiva e sistemática das abstracções da Análise Matemática.

O sucesso assim alcançado foi a prova mais cabal de que a atitude científica tradicional era a única válida para esclarecer os segredos da Natureza concreta e permitir o progresso.

Perante tais evidências, a investigação aplicada integrou-se nos métodos científicos tradicionais e, apenas pelo objecto imediato do seu interesse, se distingue ainda da investigação científica, como já notamos no início destas palavras.

Paralelamente, o problema dos especialistas ficou consideràvelmente esclarecido: Para o processamento do progresso da Ciência e das suas aplicações importava que a cultura científica dos responsáveis pelo mesmo fosse a mais vasta e profunda possível. Nos aspectos que aqui abordamos, é apenas esta a conclusão que se deve estabelecer, embora se reconheça que o problema da especialização tem ainda outras implicações.

Em face de tais verificações, como situar o engenheiro, homem por definição, encarregado de conceber, dar forma e conduzir as tecnologias, as quais são as manifestações industriais das ciências concretas.

Antes de mais, temos de esclarecer que a denominação geral de engenheiro deverá, actualmente, desdobrar-se nas de *engenheiro de investigação, engenheiro projectista, engenheiro de exploração* e *engenheiro de organização* ou noutras similares.

O primeiro destes tipos, o engenheiro de investigação, distingue-se cada vez menos do cientista. É, por assim dizer, um cientista interessado num determinado ramo das ciências fisicoquímicas, cuja actividade visa o progresso geral desse ramo e também a resolução de problemas específicos da indústria correlativa.

O engenheiro projectista, actuando nos gabinetes de estudo ou projecto, concebe a maquinaria, as instalações e as obras. Normalmente não investiga, mas serve-se dos resultados da investigação e, com frequência, promove mesmo a investigação. É o utilizador mais directo dos resultados do laboratório e acontece até que, por vezes, projecta para que nele se ensaie. A sua cultura científica tem de ser tão profunda quanto a do investigador e, certamente, mais vasta. A sua influência na maquinaria, organização e economia industriais é notória, pelo que convirá que haja começado a vida profissional como engenheiro de exploração.

Este, o engenheiro de exploração, é o tipo mais característico de quantos a engenharia exibe. É o homem de cultura universitária responsável pela obra ou pela produção, actuando entre os homens, como qualquer homem. Nimbado pelo conhecimento científico que adquiriu na escola, é permanentemente compelido a aplicá-lo sem longos raciocínios ou prolongados cálculos. A sua capacidade de decisão recta tem de ser larga e rápida. É como que um semi-deus que deve possuir omnisciência, audácia e senso. É muito mais evoluído que o simples prático, porque ilumina o empirismo que tem de praticar com o cientismo de que é portador.

Na formação deste tipo, o mais numeroso que as escolas de engenharia produzem, há que tomar particulares cuidados e é aqui que o problema da especialização é mais agudo e realmente levanta controvérsia.

Em princípio, pelo menos, o engenheiro de exploração não projecta nada de novo, não se exige dele que invente, nem que crie nova explicação para qualquer processo industrial. Espera-se antes que execute criteriosamente o projecto ou mantenha a produção no nível e qualidade requeridos. Portanto, uma perfeita organização industrial exigirá que esse tipo de engenheiro seja altamente especializado no campo da aplicação que lhe compete e, simultâneamente, possuidor de formação básica físico-química muito sólida, para que, nas inúmeras vezes que tiver de decidir sózinho, o faça com pormenorizado conhecimento do campo onde actua e o possa explorar com todos os recursos científicos.

Finalmente, duas palavras apenas, sobre o engenheiro de organização. Trata-se de um tipo misto de engenheiro e de economista que as escolas não assentaram a quem pertencia criar. Possìvelmente, por longo tempo ainda, serão formados a partir de engenheiros que completam e alargam a sua formação nas escolas superiores de economia.

Há, portanto, que considerar como específicos da engenharia os três primeiros tipos acima referidos.

As escolas portuguesas de engenharia fornecem actualmente o título de engenheiro, que corresponde ao grau de bacharelato, e facultam um doutoramento.

Podemos admitir que os estudos para o título de engenheiro correspondem aos do tipo denominado engenheiro de exploração, embora se reconheça, quase unânimemente, a conveniência de criar maior número de especialidades. Isto é, dentro do critério já enunciado, especializar ao nível das Aplicações, embora a cultura matemática e físico-química básica, não deva diminuir e, se possível, aumente mesmo, quer em extensão, quer em profundidade. Simultâneamente, parece ser opinião geral, que perfilho inteiramente, diminuir a duração deste curso para cinco anos apenas.

É possível que, acentuando-se mais o desenvolvimento da indústria portuguesa, a criação de novas especialidades se torne uma realidade. Oxalá.

O doutoramento que corresponde ao grau máximo de cultura universitária convirá, sem dúvida, aos engenheiros de investigação e de projecto. Contudo, aparece um pouco isolado dos estudos anteriores. Conviria que as escolas de engenharia facultassem, pelo menos, um grau intermédio — uma *postgraduação* — que se alcançaria com mais dois anos de estudos, durante os quais, a cultura

matemática e físico-químico seria ampliada e um sólido trabalho experimental realizado. Em princípio, esse grau exegiria também passagem prévia e prolongada na Indústria, ao nível da exploração.

* * *

Enfim, tentei ràpidamente, para vos não fatigar, explicar alguns aspectos que me pareceram relevantes da estrutura dos cursos de engenharia, com a intenção de ajudar os novos alunos a orientar-se nesta Escola.

Vou agora terminar lembrando que esta, como outra qualquer escola superior, evolui e um dos principais fautores dessa evolução é o *visa a tergo* das novas vagas que, todos os anos, a atingem. Ides por isso, vós os novos alunos, simultâneamente com os vossos estudos, empenhar-vos, mesmo sem dar por isso, no progresso do Instituto Superior Técnico. Aproveitai esta oportunidade para realizar também, em tal domínio, trabalho positivo e duradoiro.

MAGUE

CONSTRUÇÕES METALO-MECÂNICAS MAGUE,

(S. E. MONIZ DA MAIA & VAZ GUEDES, L.DA)

Alverca — Portugal

Ponte rolante eléctrica de 80 t/9,5 m em funcionamento na subestação de Alto do Mira (C. N. E.)

PROJECTO E FABRICO DE

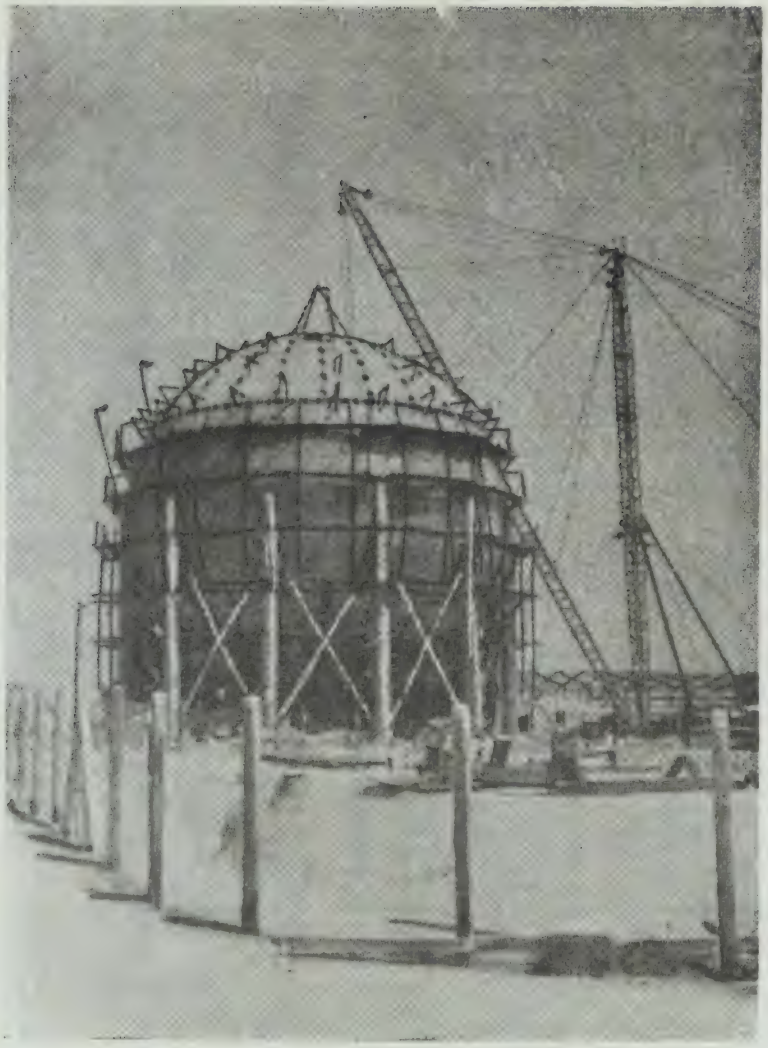
PONTES ROLANTES

GUINDASTES

GRUAS, DERRICKS E GUINCHOS

APARELHOS DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS

CONSTRUÇÕES METÁLICAS PESADAS



ESFERA

PARA

ARMAZENAGEM

DE

AMONÍACO

AÇOS VAZADOS • FERROS FUNDIDOS
MECÂNICA MÉDIA E PESADA
CONSTRUÇÕES METÁLICAS

comportas
turbinas
condutas forçadas
reservatórios sob pressão
permutadores de calor

REDUTORES DE VELOCIDADE

DIVISÃO METALO-MECÂNICA

COMPANHIA UNIÃO FABRIL

AV. 24 DE JULHO, 170 — LISBOA 2 — TELEFONES 67 04 21 E 67 20 61 — TELEGRAMAS: METALOFABRIL

C. D. U. 711.7:625.7 [3781]

ENGENHARIA DE TRÁFEGO

POR ALBERTO DIAS FERREIRA DO NASCIMENTO
Engenheiro Civil (L. E., U. do Porto)
Engenheiro de Tráfego (M. E., U. da Califórnia)
Membro Associado do «Instituto of Traffic Engineers» (Washington, D. C.)

A grande maioria dos sistemas viários existentes são impróprios para a circulação automóvel. No entanto, a sua melhoria só pode ser obtida com o recurso a uma técnica especial, designada por Engenharia de Tráfego, que teve origem nos Estados Unidos em 1930.

A finalidade deste ramo de engenharia é a de promover uma circulação cómoda, económica e segura, de pessoas e mercadorias. Não se julga possível, de momento, a criação em Portugal de um curso de especialização em Engenharia de Tráfego, pelo que, numa primeira fase, se deve criar no curso de Engenharia Civil uma cadeira que trate dos seus princípios fundamentais, pois o planeamento e a regulamentação da circulação é uma premente necessidade económica e social, que se impõe resolver urgentemente.

1 — TRÁFEGO AUTOMÓVEL

1.1 — *Antecedentes*

Após a I Guerra Mundial o grande desenvolvimento da indústria automóvel proporcionou ao tráfego automóvel possibilidades inesperadas. Para a rápida expansão dos veículos motorizados contribuíram, decisivamente, a sua velocidade e independência de horários, assim como a progressiva diminuição do seu custo.

Devido a essa expansão foi necessário adaptar as estradas existentes ao novo meio de transporte, pois eram impróprias para a circulação de veículos motorizados, quer pelas características geométricas do traçado, quer pela sua capacidade de carga. No entanto, os engenheiros que procederam aos trabalhos de adaptação, assim como à construção de novas estradas, tinham como objectivo fundamental assegurar a circulação em qualquer época do ano, libertando as estradas da lama e do pó.

Não tinham, duma maneira geral, quaisquer preocupações quanto à segurança e regulamentação da circulação dos veículos, mas ùnicamente a de proporcionar-lhe um pavimento por onde pudessem circular.

Pode portanto dizer-se que a maioria das estradas existentes, em todo o mundo, resultaram da adaptação de estradas anteriores à invenção do automóvel, ou seja, projectadas para veículos de tracção animal. Desta adaptação resultaram estradas cujas características são impróprias para o tráfego automóvel actual. Com efeito, em consequência do aumento de potência dos veículos a que correspondeu uma maior velocidade, assim como do aumento das suas dimensões, do seu peso, e do seu número, os defeitos iniciais das estradas passaram a ter consequências inadmissíveis, quer quanto a congestionamento quer quanto a acidentes.

Nas cidades também os arruamentos existentes são impróprios para o tráfego automóvel. De facto, observando uma cidade dos nossos dias verifica-se que o traçado dos arruamentos é o mesmo de uma cidade da antiguidade. O traçado urbano actual de malha rectangular foi usado pela primeira vez na Grécia, por Hippódamos, quando só existiam veículos de tracção animal.

Tem-se insistido em adoptar sistemas viários impróprios para a época motorizada em que se vive.

Na verdade, os urbanistas não conseguiram na maioria dos países proceder a uma verdadeira reforma urbanística, a fim de adaptar as cidades às novas condições impostas pelo tráfego automóvel, cuja pressão é cada vez mais insuportável nas antigas cidades e nos novos aglomerados urbanos, que continuam a ser construídos como se o motor de explosão ainda não tivesse sido

inventado. Deve dizer-se, porém, que os principais responsáveis dessa situação não são os urbanistas, mas sim as autoridades administrativas, que não conseguem resistir às manobras dos interesses criados; e as populações que, devido à falta de uma propaganda eficiente dos novos conceitos urbanísticos, não se apercebem fàcilmente da deficiência das soluções adoptadas. Acontece ainda que, normalmente, a grande preocupação urbanística das populações consiste em arranjar uma habitação, pelo que os princípios urbanísticos a que deve obedecer qualquer plano não lhe interessam, senão acessòriamente, o que aliado à falta de cultura, à dificuldade de mesmo os mais cultos poderem apreciar objectivamente as soluções propostas, e à impossibilidade de discuti-las com os autores, explica esse desinteresse, que embora não seja real, é pelo menos aparente.

1.2 — *Situação actual*

As principais causas das dificuldades actuais de circulação e estacionamento são as seguintes:

a) — Utilização das mesmas vias por veículos com características absolutamente dispares quanto ao sistema de propulsão e a dimensões.

b) — Traçados inadequados, quer pelas características geométricas, quer pelo estado do pavimento.

c) — Falta de previsão, a longo prazo, dos volumes de tráfego e da necessidade em estacionar.

d) — Planeamento a curto prazo baseado em normas e princípios ultrapassados.

e) — Falta de legislação, quanto à necessidade de se planear e projectar de acordo com as exigências do tráfego automóvel, quanto à regulamentação da circulação, e quanto à obrigatoriedade do ensino e divulgação permanente das regras de circulação a condutores e peões.

No entanto, pode dizer-se que as dificuldades actuais são devidas essencialmente à falta de um planeamento de acordo com os condicionamentos impostos pelo tráfego automóvel, e quando o mesmo existe, ao desrespeito dos seus princípios básicos por falta de uma legislação eficiente e actualisada, e da inerente fiscalização.

A actual situação não pode ser remediada com soluções «ad hoc». Sòmente com o estudo dos problemas segundo os processos usados na engenharia se pode obter a sua resolução.

Esses estudos são baseados em investigação sobre os hábitos dos condutores e peões, e suas causas; dimensões e capacidade de manobra dos veículos; e características da circulação (velocidades, volumes, mudanças de direcção, perdas de tempo, e outras características operacionais). Avalia-se assim o efeito recíproco das características geométricas dos traçados, regulamentação do tráfego e actuação dos usuários, e determinam-se as verdadeiras causas dos acidentes, congestionamento e outras deficiências do tráfego.

Posteriormente a quaisquer melhoramentos deve-se proceder a novos estudos, a fim de se avaliarem os resultados obtidos. O conjunto destes estudos designa-se por «Estudos Antes e Depois» e são indispensáveis em quase todos os problemas de tráfego, tanto mais que a Engenharia de Tráfego não atingiu ainda o grau de maturidade das especialidades tradicionais, o que, aliado ao seu carácter essencialmente experimental, exige que se proceda ao seu estudo e investigação ininterruptamente.

Acontece, porém, que a resolução dos problemas de tráfego é tentada normalmente sem os estudos prévios indispensáveis, e sem os conhecimentos necessários para a obtenção de uma boa solução. Por estas razões, o que parecia uma solução óbvia, verifica-se frequentemente ser uma má solução, uma vez analizados ùnicamente os diagramas do tráfego. A análise dos factos é a única base para a resolução dos problemas, pelo que as ideias preconcebidas devem ser evitadas.

Torna-se, portanto, necessário recorrer a engenheiros com uma formação especial, ou seja a Engenheiros de Tráfego, para se obter uma circulação eficiente e eliminar, ou pelo menos reduzir, os acidentes.

2 — ENGENHARIA DE TRÁFEGO

2.1 — *Evolução histórica*

Embora o primeiro sinal luminoso tenha sido instalado em 1912, sómente dez anos mais tarde, ou seja posteriormente à I Guerra Mundial, foi criado numa cidade americana o lugar de Engenheiro de Tráfego. As funções do Engenheiro

de Tráfego nessa época eram muito mais limitadas do que actualmente. Com efeito, a instalação de sinais luminosos e a análise dos acidentes eram as suas principais actividades.

A maior parte dos métodos utilizados actualmente no estudo do tráfego, como base para a sua regulamentação e planeamento, eram ainda desconhecidos.

Em 1930 a Engenharia de Tráfego foi considerada nos Estados Unidos como uma especialidade diferente da engenharia de estradas, criando-se a respectiva associação profissional, o «Institute of Traffic Engineers».

Nesse ano havia nos Estados Unidos um veículo motorizado por cada cinco habitantes, tendo-se verificado 32 900 mortes devido a acidentes, e uma taxa de mortalidade de 15,6 por cem milhões de veículos-milhas. A expansão da Engenharia de Tráfego, posteriormente à II Guerra Mundial, foi tal que em 1956 todas as cidades dos Estados Unidos com mais de 100 000 habitantes tinham um departamento de tráfego com categoria idêntica à do clássico departamento de arruamentos.

Em 1956 a taxa de mortalidade foi de 6,4, o que corresponde a uma diminuição de 59 % relativamente a 1930.

A principal razão porque nos Estados Unidos, em 1930, se concluiu pela necessidade de engenheiros especializados em tráfego e de um departamento de tráfego autónomo, foi a existência nas cidades de vários departamentos com interferência nos problemas relativos à circulação, mas de forma desconexa e restrita.

Com efeito, a polícia conhecia bem os regulamentos mas não tinha experiência da utilização da sinalização luminosa e descurava o emprego de métodos estatísticos; o departamento de arruamentos construia os arruamentos e cruzamentos ignorando muitas vezes a regulamentação do tráfego e as suas necessidades; e os urbanistas, encarregados do plano-director, eram muitas vezes ultrapassados pelos problemas, devido a desconhecerem as necessidades presentes e futuras do tráfego. Resumindo, havia vários departamentos preocupados em resolver os problemas de tráfego, mas cada um sob um aspecto limitado.

No entanto, a simples existência de um departamento de tráfego não pressupõe que os problemas sejam resolvidos. Para isso é necessário que disponha de pessoal técnico especializado, ou seja de engenheiros de tráfego, e de meios legislativos que lhe permitam exercer a sua acção, devendo a coordenação com os restantes departamentos ser assegurada por intermédio duma Comissão de Tráfego.

2.2 — *Definição e objectivos*

A Engenharia de tráfego é definida nos Estados Unidos, pelo «Institute of Traffic Engineers», como:

> «O ramo da engenharia que trata do planeamento e características geométricas dos arruamentos, estradas e áreas marginais, assim como das operações de tráfego, de modo a que o transporte de pessoas e mercadorias seja cómodo, económico e seguro.»

A Engenharia de Tráfego tem como objectivo essencial a coordenação dos elementos dinâmicos e estáticos das vias de modo a obter-se a sua melhor utilização. Esse objectivo é alcançado por meio de:

a) — Regulamentação do tráfego nas vias existentes, a fim de se melhorarem as condições da sua utilização.

b) — Planeamento de novas vias, e reconstrução das existentes, com as características necessárias para que o tráfego se faça com comodidade, economia e segurança, no presente e no futuro.

O estudo dos problemas, e os métodos de investigação, da Engenharia de Tráfego diferem dos usados normalmente em engenharia de estradas, pois é necessário entrar em consideração com a psicologia dos condutores e com o seu comportamento social.

Além duma sólida formação técnica o engenheiro de tráfego deve possuir conhecimentos básicos de economia, cálculo de probabilidades, métodos estatísticos e relações públicas, a fim de saber esclarecer convenientemente a população. Com efeito, numa sociedade bem organizada, os projectos antes de executados têm de ser prèviamente aceites pela comunidade, o que implica a existência de um serviço informativo capaz de fazer aceitá-los. Na verdade, não se podem obter

melhorias importantes no tráfego sem contrariar os hábitos da população, e esta não gosta que lhe alterem a rotina diária. Tem-se verificado, nos Estados Unidos, ser necessário mais tempo para convencer as autarquias das zonas abrangidas pela construção de auto-estradas urbanas das vantagens do seu traçado, do que para a sua construção.

O engenheiro de tráfego também não pode ignorar os princípios do urbanismo, pois o tráfego é uma manifestação das actividades urbanas, que por sua vez dependem da ocupação do solo. Idênticamente uma modificação nos transportes reflete-se naquela.

De facto, uma alteração na ocupação do solo torna necessários novos meios de transporte, que por sua vez provocam o desenvolvimento de novas áreas urbanas. É necessário prever os efeitos mútuos da ocupação do solo e dos transportes. Com efeito, o contrôle da ocupação do solo, por meio de zonamento, tem directa influência nos problemas de tráfego relativos a acessos, geradores, e estacionamento, que devem ser resolvidos pelo engenheiro de tráfego. A este compete transformar a ocupação do solo, prevista pelo urbanista, em factores que afectam a implantação das vias de comunicação e as suas características geométricas.

Além disso as informações prestadas pelo urbanista, relativas à densidade da população, seu aumento e situação económica são essenciais para a previsão do tráfego. Os objectivos do urbanista e do engenheiro de tráfego são idênticos em muitos aspectos, pelo que devem ser coordenados desde o início, no interesse de melhor desenvolvimento de qualquer plano de urbanização. Torna-se portanto necessária uma colaboração íntima do urbanista e do engenheiro de tráfego, dada a sua interdependência, a fim de se assegurar à comunidade a melhor solução.

Mas, para que a solução dos problemas de tráfego seja uma realidade, é necessário que seja promulgada a legislação indispensável para fazer respeitar as soluções adoptadas, e que se eduquem os usuários. Por outras palavras, é necessário que um engenheiro especializado em tráfego resolva os problemas, que seja promulgada a legislação correspondente, que o cumprimento dessa legislação seja fiscalizada por agentes especialmente treinados, e que os organismos interessados (automóvel clubs, seguradores, vendedores de automóveis, etc.), e as autoridades administrativas, tomem a iniciativa de preparar a população para a época motorizada em que se vive, educando-a convenientemente.

As soluções mais bem concebidas podem resultar num fracasso se não se conseguir interessar o público nos resultados a obter, para o que é essencial esclarecê-lo sobre os fins a atingir, e ensinar-lhe como proceder.

Citam-se como exemplo os sinais de prioridade, de cuja utilização pode resultar o aumento do número de acidentes, se prèviamente os condutores não forem convenientemente esclarecidos sobre o seu significado.

A Engenharia de Tráfego será tanto mais efectiva quanto os meios coercivos (cartas de condução, inspecção de veículos, polícia e tribunais) e educativos forem desenvolvidos, pois só assim haverá um razoável nível de obediência à regulamentação do tráfego.

2.3 — *Funções do Engenheiro de Tráfego*

O engenheiro de tráfego exerce as suas funções principalmente no Estado e nos Municípios. Cada entidade deve no entanto definir os limites da sua acção, a fim de se evitarem dúvidas sobre quem é o responsável por certas funções, o que é essencial para a eficiência dos serviços.

Quanto a funções do engenheiro de tráfego temos a considerar o planeamento, o projecto e as operações, o que a seguir se discrimina:

1 — Planeamento — Que compreende:

- 1.1 — Estudos de origem e destino (O-D) a fim de se conhecerem as deslocações desejadas.
- 1.2 — Previsão dos volumes de tráfego futuros.
- 1.3 — Inventário das vias existentes a fim de se proceder à sua classificação, avaliar as suas deficiências, determinar prioridades, e definir um sistema de auto-estradas e de artérias principais (Plano-Director).
- 1.4 — Parques e garagens de estacionamento.
- 1.5 — Terminais de autocarros e camiões.
- 1.6 — Transportes colectivos.
- 1.7 — Revisão dos projectos relativos à

sub-divisão das áreas a urbanizar.

1.8 — Estudos de rentabilidade.

2 — Projecto — As funções relativas a este consistem essencialmente na definição das características geométricas, havendo a considerar:

2.1 — Projecto de novas vias de circulação, de modo a satisfazerem aos volumes e velocidades previstas.

2.1.1 — Definição de normas relativas ao traçado, em planta e perfil, perfil transversal tipo e acessos.

2.1.2 — Estudo de cruzamentos de nível e a níveis diferentes.

2.2 — Revisão das características geométricas das vias e cruzamentos existentes, a fim de se aumentar a sua capacidade e segurança.

2.3 — Parques e garagens de estacionamento, assim como terminais.

2.4 — Definição de normas para o traçado das ruas locais de acesso aos terrenos marginais.

3 — Operações — Como operações temos:

3 1 — Estudo das modificações a introduzir nas posturas relativas a estacionamento, carga e descarga, limites de velocidade, mudança de direcção, sentido único, prioridade nos cruzamentos, ultrapassagens, etc.

3.2 — Identificação e estudo dos locais com elevada percentagem de acidentes, assim como das zonas onde se verificam congestionamentos, e recomendação das soluções convenientes.

3.3 — Instalação e conservação dos meios de regulamentação do tráfego.

Resumindo, pode-se dizer que o engenheiro de tráfego procede ao planeamento da circulação, estuda os meios para melhorar a mesma, determina a viabilidade económica dos projectos, e investiga a eficácia das normas adoptadas nos projectos e das modificações efectuadas nos meios de controle da circulação.

Todas as suas recomendações são baseadas no estudo prévio dos elementos que caracterizam a situação existente e futura, e não em opiniões pessoais, pelo que as soluções propostas devem ser consideradas como as melhores possíveis, relativamente aos dados disponíveis.

3 — ENSINO DA ENGENHARIA DE TRÁFEGO

3.1 — *Nos Estados Unidos*

Como é óbvio, o ensino da Engenharia de Tráfego teve início nos Estados Unidos, onde adquiriu grande expansão a partir de 1936, quando o «Harvard Bureau for Street Traffic Research», da Universidade de Harvard, expandiu os seus programas e concedeu várias bolsas de estudo a licenciados. Este curso foi posteriormente transferido, em 1939, para a Universidade de Yale, cujo «Bureau of Highway Traffic» ainda actualmente é uma das escolas de mais elevado nível.

No ensino actual há a considerar:

a) — Especialização em Engenharia de Tráfego, a qual assegura a formação de profissionais de vários níveis.

b) — Cursos de aperfeiçoamento para engenheiros de tráfego e licenciados em outras especialidades, que se ocupam de problemas de tráfego, tais como engenheiros de estradas, engenheiros municipais, urbanistas, economistas, etc.

O ensino de Engenharia de Tráfego é ministrado nas Universidades, havendo a considerar programas para licenciados e não licenciados.

3.1.1 — Programas para licenciados — Há actualmente cerca de vinte Universidades que concedem os graus de Master e Doutor em Engenharia de Tráfego, às vezes também designada por Engenharia de Transportes. Entre essas Universidades contam-se as da Califórnia, Illinois, Michigan, Northwestern (Chicago), Ohio, Pensylvania e Texas, assim como o Brooklyn Polytechnic e o Massachusetts Institute of Technology (MIT). Em cada Universidade há uma grande variedade de cadeiras, o que permite ao aluno seleccionar as mais de acordo com as suas necessidades e preferências. Entre essas cadeiras há algumas de especialidade afins, como sejam: psicologia, economia, estatística e urbanismo. Um programa

tipo para a obtenção do grau de Master, no «Institute of Transportation and Traffic Engineering» (ITTE) da Universidade da Califórnia, em Berkeley (S. Francisco), inclue as seguintes cadeiras:

— Análise Estatística do Tráfego
— Características do Tráfego
— Economia dos Transportes
— Finanças Rodoviárias
— Operações de Tráfego
— Planeamento Económico de Estradas
— Planeamento Urbano e Regional
— Projecto Avançado de Estradas

No entanto, para a obtenção do grau é ainda necessário elaborar um trabalho de investigação.

No ITTE o horário das cadeiras varia todos os anos, havendo sempre cadeiras com aulas às 19 horas, e aos sábados de manhã.

Essa variação tem por fim permitir aos licenciados, já empregados, continuarem a estudar e obterem o grau de Master ou Doutor, o que implica a melhoria da sua situação económica.

O ITTE foi criado em 1948, sendo uma secção autónoma do Departamento de Engenharia da Universidade da Califórnia. Tem duas secções, uma em Berkeley (S. Francisco) e outra em Los Angeles, sendo as suas actividades coordenadas por um director. A secção de Los Angeles destina-se essencialmente à investigação, e a de Berkeley ao ensino.

Na secção de Los Angeles investiga-se o comportamento dos condutores nos acidentes, e os factores que condicionam as suas atitudes fisiológicas e psicológicas; a utilização de computadores electrónicos na sinalização luminosa; a aplicação da electrónica às necessidades da Engenharia de Tráfego, etc.

O «Bureau of Highway Traffic», da Universidade de Yale, concede ùnicamente um certificado em Engenharia de Tráfego. Além disso, não há qualquer possibilidade de escolha de cadeiras, sendo o programa o mesmo para todos os alunos.

3.1.2 — Programas para não licenciados — Em algumas Universidades há a especialidade de Engenharia de Transportes que, além das cadeiras básicas do curso de Engenharia Civil, inclui as de: Betumes, Estudo Económico de Traçados, Economia dos Transportes, Mecânica dos Solos e Princípios Fundamentais da Engenharia de Tráfego.

Recentemente foi sugerido que, em todas as Universidades, o curso de Engenharia Civil inclua uma cadeira sobre os princípios fundamentais da Engenharia de Tráfego.

3.1.3 — Cursos de Aperfeiçoamento — O seu objectivo é o de permitir aos engenheiros civis, e licenciados em especialidades afins, ampliar os seus conhecimentos em Engenharia de Tráfego, assim como facilitar aos engenheiros de tráfego a troca de impressões, e a discussão e apresentação de novos métodos e processos. O ITTE tem um excelente serviço de extensão universitária, na elaboração de cujos programas colaboram organismos oficiais e particulares. Os instrutores, assim como o material, são fornecidos pelo Instituto, constando os programas de reuniões, cursos de pequena duração, e cursos nocturnos regulares.

As reuniões, com duração de meio dia a três dias, são em geral efectuadas nos maiores centros populacionais e variam desde a apresentação de uma personalidade de invulgar categoria à discussão de relatórios sobre temas seleccionados prèviamente, como seja a «California Street and Higway Conference», que se realiza anualmente.

Os cursos de pequena duração são leccionados em pequenas cidades, sendo as sessões de trabalho efectuadas nos fins de semana ou à noite. Realizam-se também todos os anos cursos de verão, com a duração de uma ou duas semanas, com sessões durante todo o dia, normalmente frequentadas por técnicos cujas funções requerem o conhecimento dos princípios básicos da Engenharia de Tráfego. Os cursos de extensão universitária do ITTE têm sido frequentados anualmente por cerca de 3.000 alunos.

3.2 — *Na Europa*

Embora os princípios fundamentais da Engenharia de Tráfego sejam aplicáveis a todos os países, a sua interpretação e aplicação pode no entanto variar.

O número de veículos, as suas dimensões, a percentagem de pesados, o número de bicicletas e de peões, assim como a maneira de conduzir e a composição do tráfego, não são as mesmas nos Estados Unidos e na Europa.

E desejável portanto que nas Universidades europeias haja, pelo menos, uma cadeira de tráfego adaptada às condições locais.

Deve-se à Federação Internacional de Estradas a formação da maior parte dos especialistas europeus em tráfego, em virtude da concessão de bolsas de estudo, e à Organização Mundial de Turismo e do Automóvel a divulgação dos seus princípios, devido à organização de Semanas Internacionais de Estudo.

3.2.1 — A Federação Internacional de Estradas (IRF) é uma organização particular, sem fins lucrativos, com a finalidade de promover a construção e melhoria das estradas, assim como o desenvolvimento dos transportes rodoviários. Foi fundada em 1948 por industriais americanos, interessados na venda de equipamento utilizado na construção e operação de estradas, que conjugaram os seus interesses com os da colectividade, pois as estradas são essenciais para o desenvolvimento económico e social de qualquer país. Com efeito, a construção de estradas permite o acesso às matérias-primas, o cultivo de novas áreas, o aumento da produção, a permuta de ideias e serviços, e a extensão a novas regiões dos benefícios culturais, económicos e assistenciais dos tempos modernos. A IRF promove a criação de associações nacionais e assegura a sua ligação, colaborando também com organizações afins, como sejam a Organização Mundial do Turismo e do Automóvel e a Associação Internacional Permanente dos Congressos da Estrada, sendo também membro consultivo das Nações Unidas e da Organização de Cooperação e Desenvolvimento Económico. Publica um Boletim em inglês, francês, espanhol e alemão, assim como uma revista trimestral (Road Internacional), em que divulga informações de carácter técnico, económico, estatístico e educativo, e defende a necessidade de planeamento e da execução de programas devidamente estruturados. A Federação concede bolsas de estudo nos Estados Unidos, e recentemente na Grã-Bretanha, para a especialização em engenharia de estradas e de tráfego, sendo esta uma das suas actividades mais úteis. Desde 1949 concedeu 303 bolsas de estudo a engenheiros de 76 países, duas das quais a Portugal, no que dispendeu cerca de 30.000 contos.

3.2.2 — Como se disse anteriormente, a divulgação dos princípios da Engenharia de Tráfego na Europa deve-se às Semanas Internacionais de Estudo da Engenharia de Tráfego, a última das quais se realizou em Salzburgo (1962). Estas reuniões internacionais são uma iniciativa da Organização Mundial do Turismo e do Automóvel (OTA), cooperando na sua organização a Associação Internacional Permanente dos Congressos da Estrada, a Federação Internacional de Estradas, e as associações congéneres do país onde a mesma se realiza. A primeira reunião teve lugar na Holanda em 1953, tendo-se realizado as seguintes na Suíça, Itália, Dinamarca, França e Áustria.

Nestas reuniões tomam parte engenheiros de tráfego, engenheiros de estradas, técnicos dos serviços municipais, de automóvel clubs, organizações de turismo, companhias de seguros, associações de peões, etc.

3.2.3 — Devido à dificuldade em organizar um curso de Engenharia de Tráfego em todos os países europeus, foi preconizado pela OTA, em 1952, a criação de um Centro Europeu de Engenharia de Tráfego. Este centro teria três objectivos: ensino, investigação científica e assistência técnica. Quanto ao ensino, além de cursos para licenciados, haveria colóquios para os dirigentes. A finalidade desses colóquios seria a divulgação dos princípios fundamentais da Engenharia de Tráfego, o que asseguraria aos especialistas o reconhecimento do seu mérito pelos respectivos dirigentes. O centro funcionaria junto de uma Universidade existente mas teria uma administração independente, constituída por representantes dos países membros, da indústria, e dos organismos internacionais afins. Os cursos seriam proferidos alternadamente em alemão, francês e inglês, devendo o corpo docente ser constituído pelos técnicos europeus, de preferência especializados nos Estados Unidos, que tivessem maior experiência profissional. Este centro, que seria um elemento positivo de cooperação europeia, não teve ainda realização prática, devido à rápida expansão da Engenharia de Tráfego em quase todos os países europeus, nos quais era pràticamente desconhecida em 1952.

Com efeito, a situação actual na Europa quanto ao seu ensino, segundo informação prestada pela OTA, é a seguinte:

Alemanha Ocidental

Cadeiras trimestrais ou semestrais, sobre temas específicos da Engenharia de Tráfego nas universidades ou escolas técnicas das cidades de Berlim, Munique, Hannover, Stuttgart, Darmstadt, Karlsruhe e Aachen.

Bélgica

Desde 1954 que na Faculdade de Ciências Aplicadas da Universidade de Liège há uma cadeira de Engenharia de Tráfego, cuja frequência é livre.

Dinamarca

Cadeiras semestrais de Engenharia de Tráfego no Laboratório de Construções Rodoviária e Ferroviárias da Universidade Técnica de Copenhague.

Espanha

Uma cadeira de Engenharia de Tráfego na Escola dos Engenheiros de Estradas e Pontes da Universidade de Madrid.

Holanda

Uma cadeira para licenciados na Universidade de Delft.

Itália

Cadeiras de Engenharia de Tráfego, para licenciados, nas Faculdades de Engenharia de Turim e Milão, e nas Universidades de Pádua, Roma e Nápoles. Na Faculdade de Engenharia de Milão há também um curso de divulgação para graduados pelos liceus e escolas técnicas. Nas Universidades de Roma e Nápoles é possível a licenciatura em Engenharia Civil com especialização em Transportes.

Reino Unido

Nas Universidades de Birmingham, Durham, Londres e Liverpool, assim como no Royal College of Science and Technology de Glasgow, há cursos de Engenharia de Tráfego para licenciados, cuja frequência permite a obtenção de um simples diploma ou do grau de Master of Science. Além desses cursos para licenciados existe na maioria das Universidades, no último ano do curso de engenharia civil, uma cadeira de opção de Engenharia de Tráfego.

Suécia

Há uma cadeira de Engenharia de Tráfego no curso de Engenharia Civil, sendo uma das especializações possíveis nos últimos dois anos do curso, cuja duração é de quatro anos, embora um estudante médio só obtenha a licenciatura em cinco anos.

Suíça

Ensino da Engenharia de Tráfego na Escola Politécnica Federal de Zurich e na Escola Politécnica de Lausanne.

Turquia

Há uma cadeira livre, de divulgação, na Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Técnica de Istambul.

Yugoslávia

Há uma cadeira de Engenharia de Tráfegos, na Faculdade de Tráfegos, em Belgrado.

3.3 — *Em Portugal*

3.3.1 — Portugal é um dos raros países da Europa em que não se ensina a Engenharia de Tráfego em qualquer grau, o que não é de estranhar em virtude da falta de divulgação e do desinteresse de muitos dirigentes.

No entanto, a resolução dos problemas do tráfego e o planeamento de uma circulação cómoda, segura e económica, é uma premente necessidade social que não pode, nem deve, ser iludida por mais tempo. Mas como para isso são necessários técnicos com uma preparação especial (engenheiros de tráfego), pois já foi ultrapassada a época em que era possível improvisar e adoptar soluções baseadas em opiniões pessoais, conclui-se ser necessário que as escolas de engenharia promovam a formação dos mesmos.

Para se avaliar da urgência do ensino da Engenharia de Tráfego bastará referir que o número de acidentes fatais em Portugal, por 100 milhões de veículos-quilómetros é quatro vezes superior ao que se verifica nos Estados Unidos.

Segundo o Eng.º Paiva Brandão o custo total dos acidentes rodoviários em Portugal, em cada um dos anos do quinquénio 1955-59, foi em média de 640 000 contos, ou seja 1,16 % do Produto Nacional Bruto. Esta percentagem é idên-

tica à verificada em países com um grau de motorização muitíssimo maior, como sejam a França e a Suécia, o que se explica pelo facto da taxa de mortalidade ser excepcionalmente elevada em Portugal.

3.3.2 — Atendendo às realidades que se verificam actualmente, no nosso país, há a considerar dois aspectos quanto ao ensino da Engenharia de Tráfego. Isto é, a divulgação dos seus objectivos e métodos, e a formação de especialistas.

De momento não parece viável a formação de especialistas, por razões fàcilmente compreensíveis. Já o mesmo não acontece com a sua divulgação, a qual se pode conseguir fàcilmente com uma cadeira de opção (Princípios Fundamentais da Engenharia de Tráfego) a incluir no último ano da licenciatura em Engenharia Civil. Uma vez criada essa cadeira é necessário que os serviços do Estado e dos Municípios, que têm a seu cargo as questões de tráfego em maior ou menor grau, só admitam engenheiros que tenham frequentado a mesma com aproveitamento.

No Congresso do Ensino da Engenharia, realizado em Novembro de 1962, tivemos oportunidade de apresentar uma proposta sobre o ensino da Engenharia de Tráfego, do seguinte teor:

> «A licenciatura em Engenharia Civil deve incluir uma cadeira de opção sobre os «Princípios Fundamentais da Engenharia do Tráfego», e um dos futuros cursos de especialização para licenciados deverá ser o de «Engenharia de Tráfego».

Esta proposta foi aprovada por unanimidade, sendo uma das conclusões finais do Congresso, pelo que é de esperar que a Faculdade de Engenharia e o Instituto Superior Técnico iniciem em breve o ensino da Engenharia de Tráfego em Portugal.

Assegurada a divulgação dos princípios fundamentais da Engenharia de Tráfego, a formação de especialistas seria conseguida pela atribuição de bolsas de estudo em países estrangeiros, para o que se julga possível obter o apoio da Federação Internacional de Estradas e da Fundação Calouste Gulbenkian. A essas bolsas só deveriam poder habilitar-se os engenheiros civis que tivessem frequentado com aproveitamento a cadeira de «Princípios Fundamentais da Engenharia de Tráfego» e que exercessem a profissão há, pelo menos, três anos.

Uma vez iniciado o ensino da Engenharia de Tráfego, assim como a formação de especialistas no estrangeiro, estaria enormemente facilitada a criação, nas escolas de engenharia, do curso de especialização respectivo, que deve ser o objectivo final a atingir.

4 — *Conclusões*

a) A grande maioria das estradas e arruamentos existentes resultaram da adaptação de vias anteriores ao aparecimento do automóvel, pelo que são impróprias para a sua circulação, o que tem como consequência acidentes e perdas de tempo actualmente inadmissíveis.

b) A actual situação só pode ser melhorada desde que os problemas de tráfego sejam estudados por engenheiros com uma formação especial.

c) Existe um ramo de engenharia designado por Engenharia de Tráfego, com origem nos Estados Unidos, que trata do planeamento e características geométricas das vias de circulação, assim como das operações de tráfego, de modo a que o transporte de pessoas e mercadorias seja cómodo, económico e seguro.

d) As funções do Engenheiro de Tráfego consistem em analisar as condições em que se efectua a circulação, prever a circulação futura, estudar a maneira de melhorar a circulação actual e de assegurar a futura, determinar a viabilidade económica dos projectos, e investigar a eficácia das normas adoptadas nos projectos e das modificações efectuadas nos meios de controle da circulação.

e) O ensino da Engenharia de Tráfego adquiriu grande expansão nos Estados Unidos em 1936 (Universidade de Harvard), e teve início na Europa (Universidade de Liège) em 1954, sendo actualmente numerosas as Universidades europeias em que há, pelo menos, uma cadeira sobre os princípios fundamentais da Engenharia de Tráfego.

f) Não se julga possível, de momento, a criação em Portugal de um curso de especialização

em Engenharia de Tráfego. Considera-se porém urgente a inclusão, no curso de engenharia civil, de uma cadeira de opção sobre os «Princípios Fundamentais da Engenharia de Tráfego», cujo objectivo essencial será a divulgação das suas finalidades e métodos.

SUMMARY

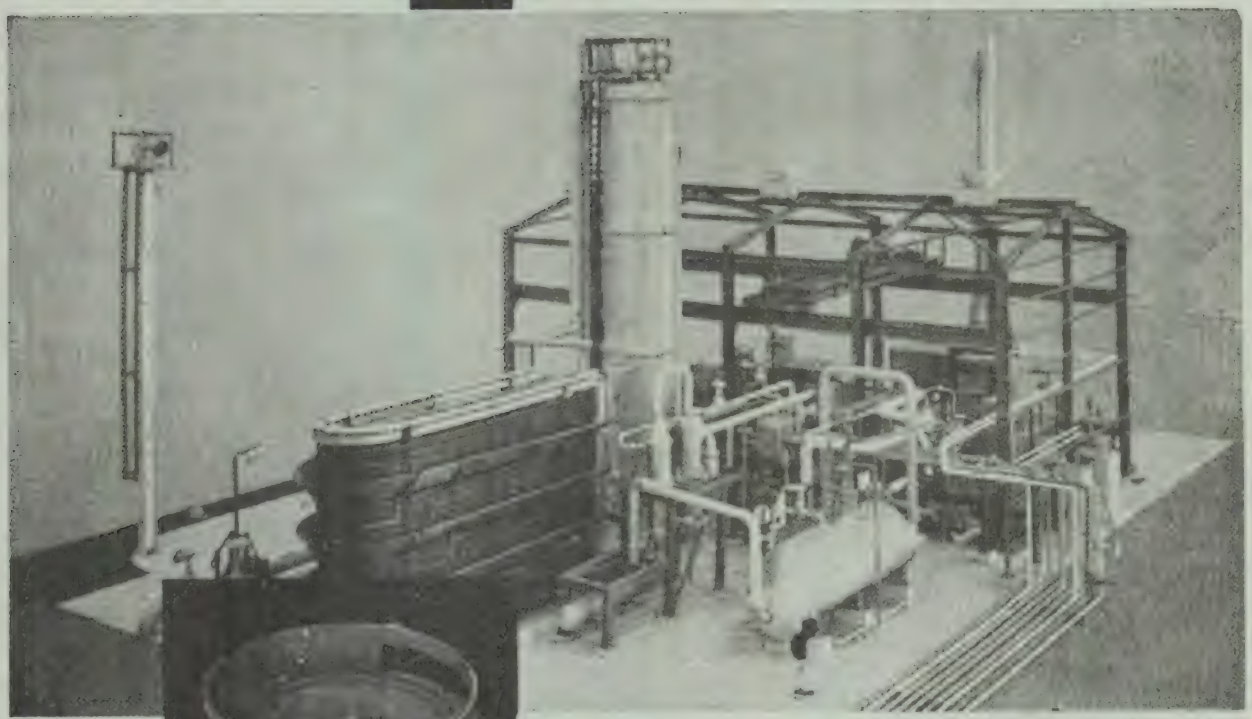
The majority of the road and street systems were not designed for motor vehicles. Neverthless their improvement could only be achieved through a proper technich, named Traffic Engineering, which was introduced in the United States during the thirties. The Traffic Engineering goals are to ensure a safe, economic and convenient transportation of persons and goods.

Graduate training in Traffic Engineering does not seem possible in Portugal by now. However the traffic planing, design and control are a growing economic and social need wich demand technical training in Traffic Engineering.

Then an optional course on the «Fundamentals of Traffic Engineering» is a necessity that could not be delated.

CENTRO DE PROJECTOS

COLOCA A SUA EXPERIÊNCIA AO SERVIÇO DA INDÚSTRIA NACIONAL



MODELO DE INSTALAÇÃO EXECUTADO A PEDIDO DO CLIENTE

MODELO DE TANQUE DE TECTO FLUTUANTE

CONSTRUÇÃO DE MODELOS REDUZIDOS

O CENTRO DE PROJECTOS CONSTRÓI MODELOS DE INSTALAÇÕES E EQUIPAMENTOS, QUER PARA REALIZAÇÕES A SEU CARGO QUER A PEDIDO DE CLIENTES COM BASE EM DESENHOS QUE LHE SEJAM FORNECIDOS.

OS MODELOS REDUZIDOS

- FACILITAM O ESTUDO DA INSTALAÇÃO
- TORNAM MAIS FÁCIL E RÁPIDA A SUA MONTAGEM
- POSSIBILITAM A INSTRUÇÃO DO PESSOAL ENCARREGADO DA CONDUÇÃO DA FÁBRICA. SÃO DE GRANDE UTILIDADE NA PLANIFICAÇÃO DA MONTAGEM DA INSTALAÇÃO

EXPONHA OS SEUS PROBLEMAS E DIRIJA AS SUAS CONSULTAS A **CENTRO DE PROJECTOS CUF** AV. 24 DE JULHO, 170 TELEF. 67 20 61 LISBOA - PORTUGAL TELEG. PROFABRIL CP-3

ESTAMPARIAS TINTURARIAS LAVANDARIAS

PARA OS VOSSOS TECIDOS TECNICOS:
TRANSPORTADORES MANKONS, LAPPING, WOLFRIES.
FLANELAS, CANEVAS, ETC.,

EM FIBRAS NATURAIS OU SINTÉTICAS

Consultem:

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 93
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

FLUIDO E MASTIC

IMPERMEABILIZAÇÕES

TORNA TUDO ESTANQUE

Impermeabilização e vedação perfeita de:

Terraços, Empenas, Algerozes, Clarabóias,
Paredes húmidas, Coberturas, Fendas,
Juntas de dilatação, etc., etc.

Fácil aplicação — Elasticidade excepcional
Não endurece nem apodrece

ROOFATEX **À base de borracha + alumínio**

Reforça a acção impermeabilizante do «Rubio», dando às construções um aspecto agradável — Protege todos os materiais contra a humidade, a ferrugem e a corrosão

RUBIO E ROOFATEX dois produtos que se completam

Representante exclusivo: *Orlando Fernandes*

Rua Palmira, 46-A-B-C — LISBOA-1 — Telefs. 83 01 63 - 84 26 39 — End. teleg. «ORFER»

C. D. U. 534.111

Sobre os movimentos vibratórios de sistemas de um grau de liberdade com elasticidade do tipo $k(x \pm \varepsilon x)$

PELO ENG.º MEC. (I. S. T.) JORGE NEVES DA SILVA
(Assistente no I. S. T. — Bolseiro do I. A. C.)

0. INTRODUÇÃO

O problema dos sistemas com elasticidade não linear do tipo Duffing

$$F(x) = k(x + \varepsilon x^3) \quad , \quad \varepsilon \lesseqgtr 0 \tag{1}$$

é fàcilmente abordável pela utilização das funções elípticas jacobianas cujas tabelas se encontram relativamente difundidas [1] (*) [2]. Embora o assunto tenha sido tratado por vários autores [3] [4], julgamos que o nosso trabalho seja inédito no que se refere à determinação das frequências em regime livre de sistemas com elasticidade assimétrica.

Nesta primeira parte limitar-nos-emos ao estudo de sistemas em regime livre.

1. GENERALIDADES

1.1. O método exclui a existência de amortecimentos, podendo no entanto considerar-se com valores aproximados para sistemas fracamente amortecidos.

1.2. O modelo físico simplificado equivalente terá a forma clássica representada na fig. 1, onde $k(x) = \frac{F(x)}{x}$ representa a característica da mola equivalente ao conjunto de todas as elasticidades do sistema. A ε chamaremos *factor de não linearidade.*

Veremos que tem importância a consideração da posição do sistema, uma vez que se for afectado por quaisquer campos constantes de forças, a função $F(x)$ será diferente.

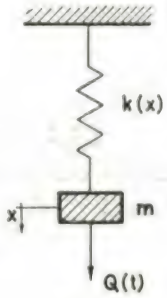


Fig. 1

1.3. Cinco tipos de molas equivalentes, aborda o processo:

1.3.1. *Molas duras ou rijas, anti-simétricas* — caracterizadas por originarem uma curva $F(x)$ de elasticidade anti-simétrica em relação à posição de equilíbrio, de derivada monotònicamente crescente, representável por um polinómio

$$F(x) = k(x + \varepsilon x^3)$$

em que $\varepsilon > 0$ (fig. 2).

1.3.2. *Molas macias ou brandas, anti-simétricas* — Caracterizadas por originarem uma curva $F(x)$ de elasticidade anti-simétrica em relação à posição de equilíbrio, de derivada monotònicamente decrescente, representável por um polinómio

$$F(x) = k(x + \varepsilon x^3)$$

em que $\varepsilon < 0$ (fig. 3)

(*) Números entre parêntesis rectos referem-se à bibliografia indicada.

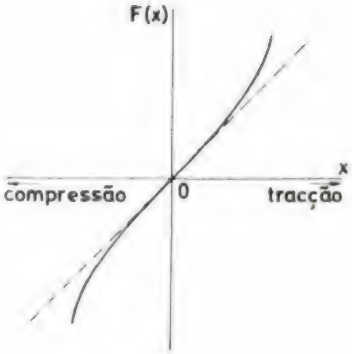


Fig. 2

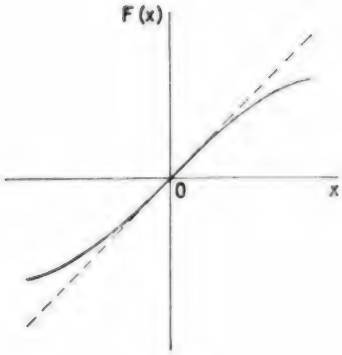


Fig. 3

1.3.3. *Molas assimétricas, macias na compressão e duras na tracção,* ou *vice-versa* — Caracterizadas por originarem uma curva F (x) de elasticidade assimétrica do tipo de 1.3.1. no ramo positivo e de 1.3.2. no ramo negativo, ou vice-versa (fig. 4-a, b)

$$F(x) = k\,(x + \varepsilon\, x^3)$$

$$\begin{cases} x > 0 \rightarrow \varepsilon > 0 \\ x < 0 \rightarrow \varepsilon < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x > 0 \rightarrow \varepsilon < 0 \\ x < 0 \rightarrow \varepsilon > 0 \end{cases}$$

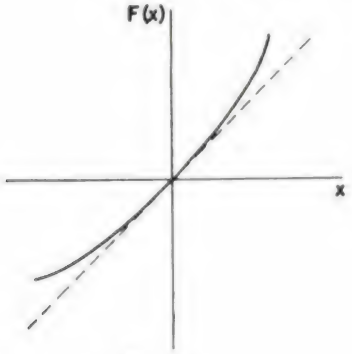


Fig. 4 a

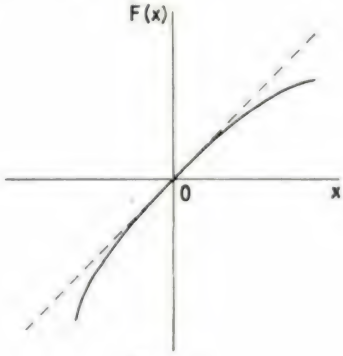


Fig. 4 b

1.3.4. *Molas assimétricas duras ou macias* — Caracterizadas por originarem uma curva F (x) de elasticidades diferentes em cada ramo, mas ambas do tipo de 1.3.1. (duras) ou de 1.3.2. (macias) (fig. 5-a, b).

$$F(x) = k\,(x + \varepsilon\, x^3)$$

$$\begin{cases} x < 0 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_1 \\ x > 0 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_1 \end{cases}$$

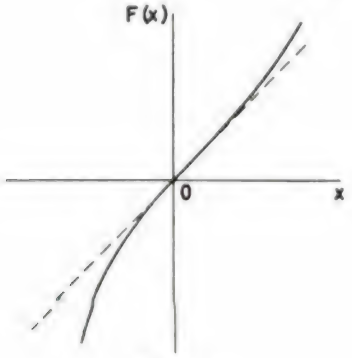


Fig. 5 a

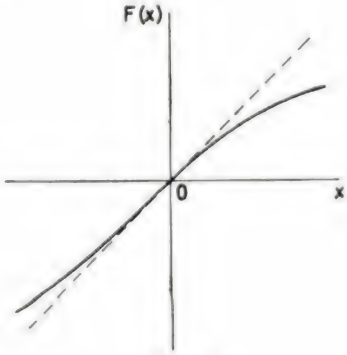


Fig. 5 b

1.3.5. *Molas assimétricas duras ou macias num ramo e lineares no outro* — Caracterizadas por originarem uma curva F (x) dura ou macia num dos ramos e linear no outro (fig. 6-a, b)

$$F(x) = k\,(x + \varepsilon\, x^3)$$

$$\begin{cases} x < 0 \rightarrow \varepsilon = 0 \\ x > 0 \rightarrow \varepsilon \neq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < 0 \rightarrow \varepsilon \neq 0 \\ x > 0 \rightarrow \varepsilon = 0 \end{cases}$$

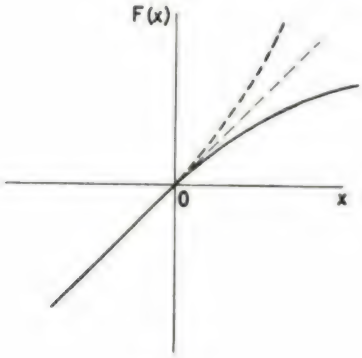


Fig. 6 a

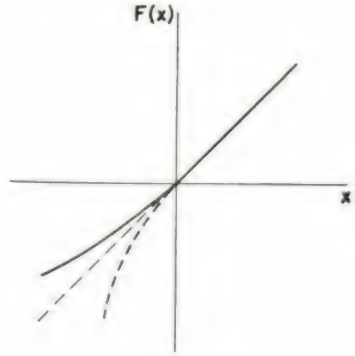


Fig. 6 b

1.4. Tendo em atenção 1.2 poderemos:

1.4.1. Ou determinar a característica da mola equivalente em relação à posição de equilíbrio suposta não influenciada por quaisquer campos, portanto

$$\vec{F} \,.\, \vec{X} = 0 \tag{2}$$

em que $\vec{F}$ (x, y, z, t) é um vector de qualquer desses campos no ponto (x, y, z) num instante t no intervalo de duração do acontecimento (vibração), e $\vec{X}$ é um vector com a direcção do movimento. No caso particular do campo derivar de um potencial V

$$\text{grad } V \,.\, \vec{X} = 0$$

e aplicando ao caso do campo gravítico

$$m \text{ grad } V = m \frac{\partial V}{\partial z} \vec{K} = -P\vec{K}$$

em que Oz é o eixo vertical, $\vec{K}$ o vector segundo o eixo Oz e P = mg o peso da massa interessada no sistema, a expressão (2) vem

$$-P\vec{K} \,.\, \vec{X} = 0$$

o que impõe que o movimento esteja no plano horizontal.

1.4.2. Ou estudar a curva F (x) em relação à posição de equilíbrio sob a acção do campo (constante). É evidente que é sempre possível a translação dos eixos e portanto por via analítica conhecer a nova função, mas a sua forma será diferente da que exige o método. Em particular uma curva anti-simétrica deixa de o ser. Há que procurar uma nova curva da forma (1) que sirva o sistema com aproximação admissível.

1.5. O modelo matemático correspondente ao modelo físico proposto em 1.2. será, tendo em atenção que $\ddot{x}$ significa $\frac{d^2x}{dt^2}$

$$m\,\ddot{x} + k\,(x + \varepsilon\, x^3) = Q\,(t)$$

ou

$$\ddot{x} + \omega_0^2\,(x + \varepsilon\, x^3) = q\,(t) \tag{3}$$

Em regime livre

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (x + \varepsilon x^3) = 0 \tag{4}$$

ω_0 representa a velocidade angular do sistema livre linear correspondente ($\varepsilon = 0$). Veremos adiante que a frequência tende para $f_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ quando a amplitude da oscilação se aproxima de zero.

2. FREQUÊNCIA, MOVIMENTO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO EM SISTEMAS LIVRES

2.1 *Integração do modelo matemático no caso geral*

Transformando a equação das forças

$$m\ddot{x} + F(x) = 0$$

numa equação de energias pelo processo clássico (ver por ex. [5]), virá, tendo em atenção que $\dot{x}$ significa $\frac{dx}{dt}$

$$m\ddot{x}\dot{x}\,dt + F(x)\,\dot{x}\,dt = 0$$

e integrando entre $(t_1, x_1, \dot{x}_1)$ e $(t, x, \dot{x})$

$$\frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \int_0^{x_1} F(x)\,dx = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \int_0^{x} F(x)\,dx = U_0 \tag{5}$$

A energia é constante, pois considera-se o sistema não dissipativo.
De (5) tira-se

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2U_0}{m}}\sqrt{1 - \frac{1}{U_0}\int_0^x F(x)\,dx} = \pm\sqrt{\frac{2U_0}{m}P(x)} \tag{5'}$$

ou ainda

$$dt = \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2U_0}{m}P(x)}} \tag{6}$$

Dadas as características do problema, pelas condições de 1.3, e porque em (5) é sempre

$$\int_0^x F(x)\,dx \leqslant U_0$$

por ser

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} \geqslant 0\ ,$$

será

$$P(x) \geqslant 0$$

E só é $P(x) = 0$ quando $\dot{x} = 0$.

Quer dizer, a equação (6) é real e contínua no intervalo aberto entre dois valores de $\dot{x}$ nulos. A análise puramente matemática das raízes de $P(x)$ levaria à existência de 4 raízes para o nosso caso particular, 4 reais ou 2 reais e 2 complexas.

Na fig. 7 [3] apresenta-se o comportamento do sistema com mola equivalente macia (4 raízes reais). O gráfico superior, além da curva $F(x)$, mostra o integral $\int_0^x F(x)\,dx$ e a curva $P(x)$ para

um dado nível energético U_0. Se U_0 for diferente, assim a curva $P(x)$ sofrerá uma translação correspondente em relação ao eixo dos xx. No caso limite, para $U_{0\,max}$ a que corresponde um máximo de $\int_0^x F(x)\,dx$ ou $P(x) = 0$ existe uma fronteira entre as regiões estável e instável chamada *separatriz*. No gráfico velocidade-deslocamento apresentam-se as curvas $v(x)$ para vários níveis energéticos, evidenciando-se (a traço mais cheio) as correspondentes ao nível U_0, com uma zona de estabilidade em torno da origem e duas zonas de instabilidade originando deformação da mola até ao infinito.

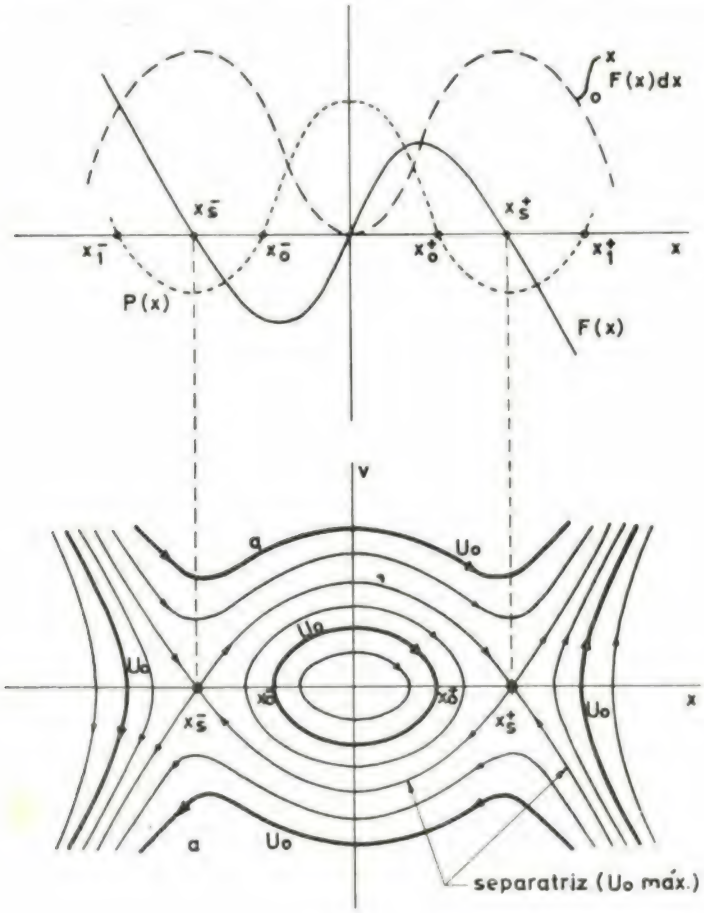


Fig. 7

Notar que se a velocidade inicial $v_1 \big|_{x_1 = 0}$ for tal que

$$\frac{m\,\dot{x}_1^2}{2} > U_{0\,max}$$

caímos numa zona de instabilidade exterior à separatriz (zonas *a* na fig. 7).

Aos pontos $(0, x_s^-)$ e $(0, x_s^+)$ chamamos *pontos de separação* ou *pontos de fronteira*.
Portanto, desde que

$$x_s^- < x_0 < x_s^+$$

para

$$\dot{x}_0 = 0$$

o sistema é estável e podemos tomar x_0^- e x_0^+ como pontos de início do movimento.

Nos sistemas duros não há zonas de instabilidade, portanto não existem separatrizes.

Integrando a equação (6), o período de oscilação (T) correspondente a um movimento de ida e volta $(0, x_0^+, 0, x_0^-, 0)$ será

$$T = \int_0^{x_0^+} \frac{dx}{+\sqrt{\frac{2U_0}{m}P(x)}} + \int_{x_0^+}^{0} \frac{dx}{-\sqrt{\frac{2U_0}{m}P(x)}} + \int_0^{x_0^-} \frac{dx}{-\sqrt{\frac{2U_0}{m}P(x)}} + \int_{x_0^-}^{0} \frac{dx}{+\sqrt{\frac{2U_0}{m}P(x)}} \tag{7}$$

tomando-se os sinais + ou — para a raíz tendo em consideração a natureza positiva do tempo.

No caso particular das curvas F(x) serem anti-simétricas será

$$x_0^- = -x_0^+$$

e

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{2U_0}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} \tag{8}$$

2.2. *Teorema*

«Para um dado conteúdo energético U_0, a frequência $f(U_0)$ de um sistema elástico assimétrico, livre, não dissipativo, de um grau de liberdade, está relacionada com as frequências $f_1(U_0)$ e $f_2(U_0)$ de dois sistemas elásticos com a mesma massa, anti-simétricos, do mesmo tipo, de elasticidades iguais respectivamente às de cada ramo da do primeiro, pela fórmula

$$f(U_0) = \frac{2}{\frac{1}{f_1(U_0)} + \frac{1}{f_2(U_0)}} \text{ »} \tag{9}$$

Demonstração:

Aplicando a equação (4) a cada um dos seguintes sistemas, teremos:

$$T(U_0) = 2\sqrt{\frac{m}{2U_0}} \left[\int_{x_0^-}^{0} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} + \int_0^{x_0^+} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} \right]$$

$$T_1(U_0) = 2\sqrt{\frac{m}{2U_0}} \left[\int_{x_{01}^-}^{0} \frac{dx}{\sqrt{P_1(x)}} + \int_0^{x_{01}^+} \frac{dx}{\sqrt{P_1(x)}} \right]$$

$$T_2(U_0) = 2\sqrt{\frac{m}{2U_0}} \left[\int_{x_{02}^-}^{0} \frac{dx}{\sqrt{P_2(x)}} + \int_0^{x_{02}^+} \frac{dx}{\sqrt{P_2(x)}} \right]$$

em que $T(U_0)$ é o período do sistema de elasticidade assimétrica, e $T_1(U_0)$ e $T_2(U_0)$ são os períodos dos sistemas de elasticidade anti-simétrica correspondentes, respectivamente, ao ramo positivo e ao ramo negativo do sistema de elasticidade assimétrica.

Como $x_{01}^- = -x_{01}$ e $x_{01}^+ = x_{01}$, e $x_{02}^- = -x_{02}$ e $x_{02}^+ = x_{02}$, será

$$\sqrt{\frac{m}{2U_0}} \int_{-x_{01}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{P_1(x)}} = \sqrt{\frac{m}{2U_0}} \int_0^{x_{01}} \frac{dx}{\sqrt{P_1(x)}} = \frac{T_1(U_0)}{2}$$

e

$$\sqrt{\frac{m}{2U_0}} \int_{-x_{02}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{P_2(x)}} = \sqrt{\frac{m}{2U_0}} \int_0^{x_{02}} \frac{dx}{\sqrt{P_2(x)}} = \frac{T_2(U_0)}{2}$$

e por ser no ramo positivo

$$P(x) = P_1(x) \qquad x_0^+ = x_{01}$$

e no ramo negativo

$$P(x) = P_2(x) \qquad x_0^- = x_{02}$$

será

$$T(U_0) = \frac{T_1(U_0)}{2} + \frac{T_2(U_0)}{2}$$

ou

$$f(U_0) = \frac{2}{\dfrac{1}{f_1(U_0)} + \dfrac{1}{f_2(U_0)}} \qquad \text{c. q. d.}$$

Corolário

«A frequência própria de um sistema elástico cuja característica k tem valores diferentes para os ramos positivo e negativo, mantendo-se constante em cada ramo, relaciona-se com as frequências dos sistemas lineares correspondentes a cada ramo pela fórmula

$$f = \frac{2}{\dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2}} \text{ »} \qquad (10)$$

Demonstração :

Pelo teorema anterior é

$$f(U_0) = \frac{2}{\dfrac{1}{f_1(U_0)} + \dfrac{1}{f_2(U_0)}}$$

Como (ver, por ex. [5])

$$f_1(U_0) = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k_1}{m}}} = f_1$$

e

$$f_2(U_0) = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k_2}{m}}} = f_2$$

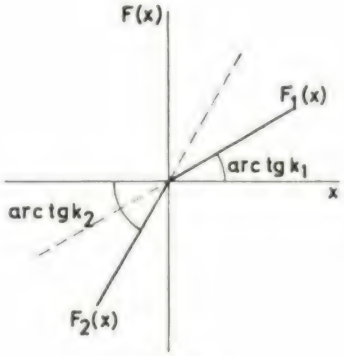


Fig 8

independentes portanto de U_0, será f independente de U_0 e igual a

$$f = \frac{2}{\dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2}} \qquad \text{c. q. d.}$$

2.3. *Integração no caso das molas macias*

P (x) será dado por

$$P(x) = 1 - \frac{1}{U_0}\int_0^x k\,(x + \varepsilon x^3)\,dx = 1 - \frac{k}{2\,U_0}\left(x^2 + \frac{\varepsilon}{2}x^4\right)$$

e (8) fica

$$T = 2\sqrt{\frac{2\,m}{U_0}}\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - \dfrac{k}{2\,U_0}\left(x^2 + \dfrac{\varepsilon}{2}x^4\right)}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2\,m}{U_o}}\int_0^{x_o}\frac{dx}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{x}{x_o}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{x}{x_1}\right)^2\right]}} \tag{11}$$

Demonstrámos em 2.1 que x_o^+ e x_o^- (neste caso $|x_o| = x_o^+ = -x_o^-$) representam um par de soluções em que para valores intermédios $P(x) > 0$. Portanto, o par $x_1^+ = -x_1^- = |x_1|$ se for real ($\varepsilon < 0$ — ver figura 7) representa soluções em valor absoluto maiores que aquelas.

Convém para integrar (11) passar do espaço (x, T) para o espaço (θ, T) pela seguinte transformação:

$$x = x_o \operatorname{sen}\theta \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ — condições de biunivocidade}\right)$$

e virá

$$d\,x = x_o \cos\theta\, d\theta$$

e (11) fica

$$T = 2\sqrt{\frac{2\,m}{U_o}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x_o\,d\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{x_o}{x_1}\right)^2\operatorname{sen}^2\theta}} = 2\sqrt{\frac{2\,m\,x_o^2}{U_o}}\;u\left(\frac{\pi}{2}\,\middle|\,\xi\right) \tag{12}$$

em que

$$u\left(\frac{\pi}{2}\,\middle|\,\xi\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\xi\operatorname{sen}^2\theta}}$$

é o integral elíptico jacobiado (i. e. j.) completo de 1.ª espécie, de parâmetro

$$\xi = \left(\frac{x_o}{x_1}\right)^2$$

A energia do sistema (U_o) pode ser obtida pela expressão

$$U_o = \int_0^{x_o} F(x)\,dx = \int_0^{x_o} k\,(x + \varepsilon\,x^3)\,dx = \frac{k}{2}\,x_o^2\left(1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon\,x_o^2\right)$$

uma vez que em (5) é $\dot{x}_o = 0$

As soluções x_1 serão obtidas pela resolução da equação biquadrada $P(x) = 0$

$$1 - \frac{k\left(x^2 + \frac{1}{2}\,\varepsilon\,x^4\right)}{k\left(x_o^2 + \frac{1}{2}\,\varepsilon\,x_o^4\right)} = 0$$

ou

$$x_1^2 = -\frac{2}{\varepsilon} - x_o^2$$

O parâmetro ξ será

$$\xi = \frac{-\varepsilon\,x_o^2}{\varepsilon\,x_o^2 + 2} \tag{13}$$

e o período, função de $\varepsilon\,x_o^2$, virá

$$T(\varepsilon\,x_o^2) = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\;\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}\,x_o^2}}\;u\left(\frac{\pi}{2}\,\middle|\,\xi\right) \tag{14}$$

e a frequência, chamando $u\left(\frac{\pi}{2}\,\middle|\,\varepsilon\right) = K(\xi)$,

novo

milivoltimetro para tensão alternada, transistorizado e de reduzidas dimensões; para a gama dos 10 c/s a 5 Mc/s. Tipo PM 2453

Alimentado por acumuladores podendo assim ser utilizado em qualquer local

Gama de tensões: 1 mV (fim de escala) a 3 V.
Usando sonda atenuadora:
100 mV (fim de escala) a 300 V.

Precisão: melhor que 5 % do desvio final de escala na gama dos 50 c/s. a 1 Mc/s.; melhor que 9 % do desvio final da escala na gama dos 10 c/s. a 50 c/s. e 1 Mc/s. a 5 Mc/s.

Completamente isento de zumbido interno e isolado da rede - ideal para medidas de tensões alternas com a frequência da rede e medidas independentes da massa.

Impedância interna: 1 MΩ/35 pF (directa) ou
1 MΩ/15 pF (através da sonda atenuadora)

Com tensão de calibração interna incorporada.

Fàcilmente transportável pesando apenas 2 Kg.

Alimentação feita por meio de 5 acumuladores de Ni Cd incorporados e recargáveis.

Duração des pilhas: 40 horas por recarga até 300 vezes.

Para fácil recarga
usar o carregador de acumuladores Philips, tipo PM 9000
Apropriado para carregar baterias ate 12 V
Corrente de carga: 45 ou 200 mA
Alimentação: 110 ou 220 V

PHILIPS

instrumentos electrônicos de medição

Vendas e assistência técnica em todo o Mundo

Philips Portuguesa S.A.R.L., Rua Joaquim Antonio d'Aguiar 66, LISBOA

Philips, Dept.º EMA, EINDHOVEN, Holanda

NOVA SOMADORA CALCULADORA "TEN KEY" DA BURROUGHS

Mais rápida, silenciosa e de alta precisão

Este modelo ultra-moderno de "Ten Key" é o resultado de 75 anos de experiência no campo de pesquisas, desenho e fabrico de máquinas de contabilidade. A BURROUGHS foi a pioneira na construção de Somadoras, e desde aí tem contribuido sempre para o aperfeiçoamento destas máquinas de grande utilidade comercial. Hoje há mais máquinas de somar BURROUGHS em serviço, em mais países, que de qualquer outra marca.

APOIADO PELO SERVIÇO MECÂNICO E PELA GARANTIA BURROUGHS

Peça uma demonstração sem compromisso
***ao representante da* Burroughs**

"SISTEMA" SOCIEDADE DE MÁQUINAS E SISTEMAS DE CONTABILIDADE, LDA.

(Associada de ROBINSON, BARDSLEY & CO., LTD.)

AV. 24 DE JULHO, 3, 1.º — TELEFONE 67 47 72 (P. P. C.) — LISBOA

PORTO — P. Carlos Alberto, 128-A, 1.º — Tel. 24007 - 20766 • COIMBRA — Bairro Marechal Carmona, Rua C, 3 — Tel. 23228

$$f(\varepsilon x_0^2) = \frac{1}{T(\varepsilon x_0^2)} = \frac{\omega_0}{4K(\xi)} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2} x_0^2}$$

ou

$$\frac{f(\varepsilon x_0^2)}{f_0} = \frac{\pi}{2K(\xi)} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \varepsilon x_0^2} \tag{15}$$

Esta expressão é ràpidamente determinável, uma vez que o valor de $K(\xi)$ está tabelado [1] [2] (ver quadro I).

QUADRO I

εx_0^2	ξ	$K(\xi)$	μ	$K(\mu)$	$\frac{f(\varepsilon x_0^2)}{f_0}$
— 1	1	∞			0
— 0,9	0,82	2,305			0,506
— 0,8	0,66	2,020			0,602
— 0,7	0,54	1,889			0,670
— 0,6	0,43	1,799			0,731
— 0,5	0,33	1,732			0,785
— 0,4	0,25	1,686			0,832
— 0,3	0,17	1,645			0,880
— 0,2	0,11	1,617			0,922
— 0,1	0,053	1,592			0,963
0	0	$1{,}571 = \frac{\pi}{2}$	0	$1{,}571 = \frac{\pi}{2}$	1
0,1			0,045	1,589	1,038
0,2			0,083	1,605	1,072
0,3			0,115	1,619	1,108
0,4			0,14	1,631	1,140
0,5			0,17	1,645	1,170
0,6			0,19	1,655	1,20
0,8			0,22	1,670	1,26
1			0,25	1,686	1,32
1,5			0,30	1,714	1,45
2			0,33	1,732	1,57
5			0,42	1,792	2,15
∞			0,50	1,854	∞

Para valores de ξ (ou μ) abaixo de 0,85 a fórmula devida a Frisch-Fay [13]:

$$K(\xi) \cong \frac{1}{2} \pi \frac{1}{(1 - 0{,}97\,\xi)^{1/4}}$$

permite determinar valores de K muito aproximados (erro máximo $\pm$ 0,12 %).

No limite, quando x_0 tende para zero, $\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2} x_0^2} = 1$ e $\xi = 0$ a que corresponde

$$u\left(\frac{\pi}{2} \,\middle|\, 0\right) = K(0) = \frac{\pi}{2}$$

e portanto

$$f(x_0 \to 0) = \frac{\omega_0}{2\pi} = f_0$$

Também, quando ε tende para zero, $\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2} x_0^2} = 1$, $\xi = 0$ e $W(0) = \frac{\pi}{2}$ e

$$f(\varepsilon \to 0) = \frac{\omega_0}{2\pi} = f_0$$

como era de esperar.

Voltando à expressão (6) teremos

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2U_0}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^2\right]}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k\left(1 + \frac{\varepsilon}{2} x_0^2\right)}} \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \xi \operatorname{sen}^2 \theta}} = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2} x_0^2}} u(\varphi \mid \xi) \qquad (16)$$

sendo $u(\varphi / \xi)$ o integral elíptico jacobiano incompleto de 1.ª espécie de parâmetro ξ. Define-se seno elíptico

$$\operatorname{sn}(u \mid \xi) = \operatorname{sen} \varphi$$

$$= \operatorname{sn}\left[\omega_0 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2} x_0^2}\,(t - t_0) \mid \xi\right]$$

Como por outro lado fizemos a transformação

$$x = x_0 \operatorname{sen} \varphi$$

virá

$$x = x_0 \operatorname{sn}\left[\omega_0 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2} x_0^2}\,(t - t_0) \mid \xi\right] \qquad (17)$$

com ξ dado por (13). A expressão (17) é uma solução particular da equação (4) para $\varepsilon < 0$ e $x_{t-t} = 0$.

Normalmente os senos elípticos encontram-se tabelados para valores de

$$0 \leqslant \xi \leqslant 1$$

Verifica-se que no caso de ser $\varepsilon < 0$ (molas macias) os valores interessantes de ξ se encontram naquele intervalo. Reportando-nos à figura 5 concluimos que só interessa o movimento estável entre x_s^- e x_s^+, valores obtidos pela equação

$$F(x) = 0$$

No nosso caso

$$F(x) = k(x + \varepsilon x^3) = 0$$

e

$$x_s^2 = \frac{-1}{\varepsilon}$$

Como

$$|x_0| < |x_s|$$

será

$$x_0^2 < \frac{-1}{\varepsilon}$$

ou

$$0 \leqslant -\varepsilon\, x_0^2 < 1$$

e portanto, de (13)

$$0 \leqslant \xi < 1$$

Na figura 9 apresenta-se a curva do movimento x (t) para $\varepsilon\, x_0^2 = -\frac{2}{3}$ ($\xi = 0{,}5$), tendo por abscissa o argumento u (curvas a traço cheio), e tendo por abscissa o tempo (curvas a traço interrompido). Ao caso limite $\varepsilon\, x_0^2 = -1$ ($\xi = 1$) corresponderia uma oscilação rectangular, embora de período infinitamente grande.

A curva a traço interrompido põe em evidência a forma da curva sn suposta com frequência igual à da correspondente sinusoidal.

A curva da velocidade virá

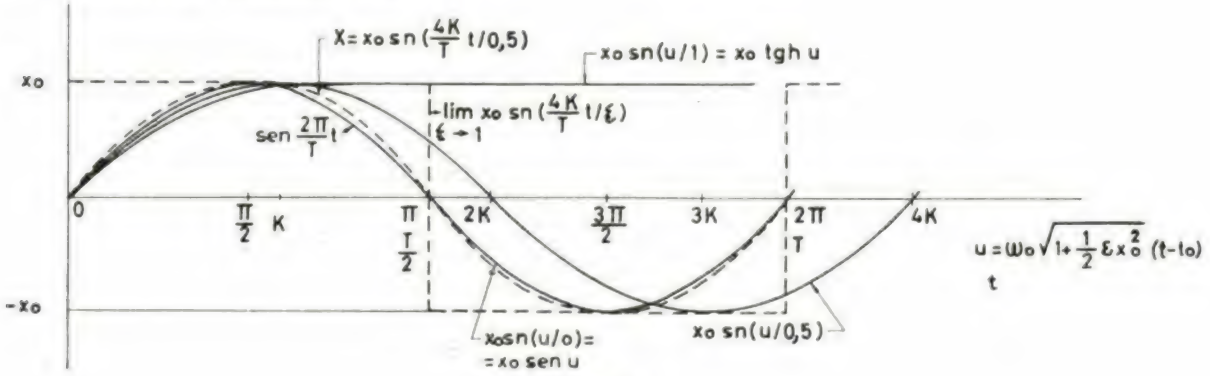


Fig. 9

$$v = \dot{x} = x_0 \frac{d}{dt}\,[\mathrm{sn}\,(u\,|\,\xi)] = x_0\,\mathrm{cn}\,(u\,|\,\xi)\,\mathrm{dn}\,(u\,|\,\xi)\,\frac{du}{dt} =$$

$$= \omega_0\, x_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon\, x_0^2}\;\mathrm{cn}\,\left[\omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon\, x_0^2}\,(t - t_0)\,|\,\xi\right]\mathrm{dn}\,\left[\omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon\, x_0^2}\,(t - t_0)\,|\,\xi\right] \tag{18}$$

sendo cn (u | ξ) o coseno elíptico que também se encontra tabelado [1] [2] e se relaciona com o sn (u | ξ) pela expressão

$$\mathrm{sn}^2\,(u\,|\,\xi) + \mathrm{cn}^2\,(u\,|\,\xi) = 1$$

e dn (u | ξ) uma função sem equivalência nas funções circulares (dn (u | 0) = 1), que se relaciona com o sn (u | ξ) por

$$\mathrm{dn}^2\,(u\,|\,\xi) + \xi\,\mathrm{sn}^2\,(u\,|\,\xi) = 1$$

existindo também em tabelas.

A aceleração correspondente será:

$$a = \dot{v} = \omega_0^2\, x_0 \left[1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon\, x_0^2\right]\left[-\,\mathrm{sn}\,u\,.\,\mathrm{dn}^2\,(u\,|\,\xi) - \xi\,\mathrm{cn}^2\,(u\,|\,\xi)\,\mathrm{sn}\,(u\,|\,\xi)\right] =$$

$$= -\,\omega_0^2\, x_0 \left[1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon\, x_0^2\right]\mathrm{sn}\,(u\,|\,\xi)\left[\mathrm{dn}^2\,(u\,|\,\xi) + \xi\,\mathrm{cn}^2\,(u\,|\,\xi)\right] \tag{19}$$

Na fig. 10 apresentam-se as curvas v (t) e a (t) para $\varepsilon\, x_0^2 = -\frac{2}{3}$ ($\xi = 0{,}5$)

A curva v (x) poderá obter-se substituindo (17) em (18) e tendo em consideração as relações entre cn $(u \mid \xi)$, dn $(u \mid \xi)$ e sn $(u \mid \xi)$, mas será imediatamente determinável recuando à expressão (5'):

$$v^2 = \dot{x}^2 = \frac{2\,U_0}{m}\,P\,(x)$$

ou

$$\frac{v^2}{\omega_0^2} + \left(1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon\,x^2\right) x^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon\,x_0^2\right) x_0^2$$

ou ainda

$$\frac{v^2}{\omega_0\,x_0^2} + \left[1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon\,x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right] \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon\,x_0^2\right) \tag{20}$$

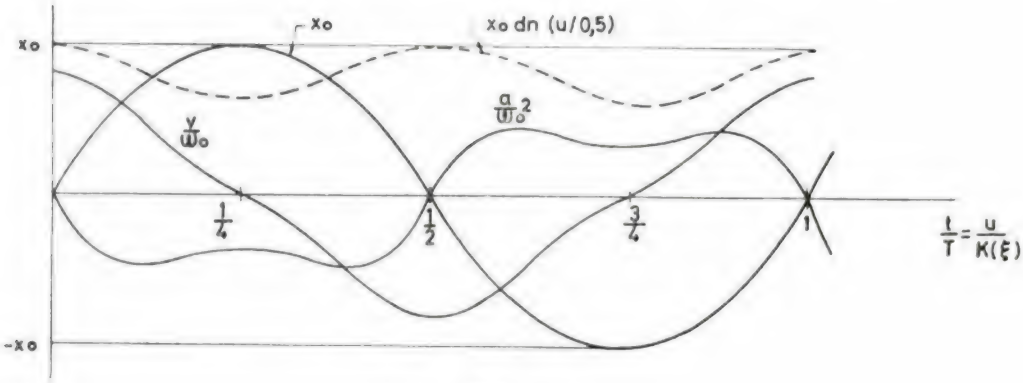


Fig. 10

Na figura 7 representa-se a curva velocidade-trajectória (separatriz: $\varepsilon\,x_0^2 = -1$; zona a: $\varepsilon\,x_0^2 < -1$). Ver também a fig. 14, onde $\varepsilon\,x_0^2 = -\dfrac{2}{3}$

Interessa conhecer ainda a forma da curva f $(\varepsilon\,x_0^2)$, frequência em função da amplitude x_0 e do factor de não linearidade, determinável a partir da expressão (15) (fig. 11 — ver também a fig. 17 para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$).

2.4. *Integração no caso das molas duras*

Como $\varepsilon > 0$ os valores interessantes de ξ são negativos, pois agora é $\varepsilon\,x_0^2 \geqslant 0$ e da expressão (13) tira-se

$$-1 < \xi \leqslant 0$$

A expressão (14) continua válida mas os valores do i. e. j. não estão tabelados para valores negativos do parâmetro. Há que efectuar a seguinte transformação [2, pág. 19]:

$$\mathrm{sn}\,(u \mid \xi) = \mu_1^{1/2}\,\mathrm{sd}\,(v \mid \mu)$$

em que

$$\mu = \frac{-\xi}{1-\xi} = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon\,x_0^2}{1+\varepsilon\,x_0^2}$$

que agora é positivo

$$0 \leqslant \mu < \frac{1}{2}$$

encontrando-se portanto tabelado,

$$\mu_1 = \frac{1}{1-\xi} = \frac{1 + \frac{1}{2}\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0^2}$$

$$v = \frac{u}{\mu_1^{1/2}}$$

e

$$sd\,(v \mid \mu) = \frac{sn\,(v \mid \mu)}{dn\,(v \mid \mu)} =$$

$$= \frac{sn\,(v \mid \mu)}{\sqrt{1 - \mu\, sn^2\,(v \mid \mu)}}$$

Então, como $u\left(\frac{\pi}{2} \mid \xi\right) = K\,(\xi)$

$$sn\,(K \mid \xi) = \mu_1^{1/2}\, sd\left(\frac{K\,(\xi)}{\mu_1^{1/2}} \mid \mu\right) = sen\,\frac{\pi}{2} = 1$$

de onde tiramos

$$sd\left(\frac{K\,(\xi)}{\mu_1^{1/2}} \mid \mu\right) = \frac{1}{\mu_1^{1/2}}$$

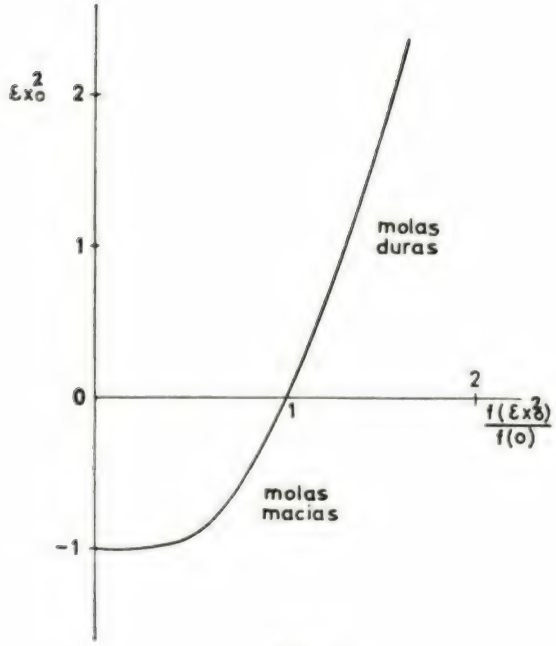


Fig. 11

e tendo em atenção a propriedade que relaciona cn com sn, virá

$$\frac{sn^2\left(\frac{K\,(\xi)}{\mu_1^{1/2}} \middle| \mu\right)}{1 - \mu\, sn^2\left(\frac{K}{\mu_1^{1/2}} \middle| \mu\right)} = \frac{1}{\mu_1}$$

ou ainda

$$sn\left(\frac{K\,(\xi)}{\mu_1^{1/2}} \middle| \mu\right) = \frac{1}{\sqrt{\mu + \mu_1}} = 1$$

e fazendo

$$K\,(\mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\theta}{\sqrt{1 - \mu\, sen^2\,\theta}}$$

virá

$$sn\,(K\,(\mu) \mid \mu) = 1$$

e portanto

$$K\,(\xi) = \mu_1^{1/2}\, K\,(\mu)$$

e a expressão (14) vem

$$T\,(\varepsilon x_0^2) = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\; \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2} x_0^2}}\; \mu_1^{1/2}\, K\,(\mu) \tag{21}$$

e (15) fica, substituindo μ_1

$$f\,(\varepsilon x_0^2) = \frac{1}{T\,(\varepsilon x_0^2)} = \frac{\omega_0}{4\,K\,(\mu)}\sqrt{1 + \varepsilon x_0^2}$$

ou

$$\frac{f\,(\varepsilon x_0^2)}{f_0} = \frac{\pi}{2\,K\,(\mu)}\sqrt{1 + \varepsilon x_0^2} \tag{22}$$

Para os valores de $K\,(\mu)$ e da frequência, ver quadro I.

A expressão (16) será agora

$$t - t_0 = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \varepsilon x_0^2}} u(\varphi \mid \xi) \tag{23}$$

ou

$$sn(u \mid \xi) = sn\left[\omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2} \varepsilon x_0^2} (t - t_0) \mid \mu\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2} \varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0^2}} \frac{sn\left[\omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon x_0^2} (t - t_0) \mid \mu\right]}{dn\left[\omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon x_0^2} (t - t_0) \mid \mu\right]}$$

e a expressão (17) vem

$$x = x_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2} \varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0^2}} \frac{sn\left[\omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon x_0^2} (t - t_0) \mid \mu\right]}{dn\left[\omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon x_0^2} (t - t_0) \mid \mu\right]} \tag{24}$$

solução particular de (4) para $\varepsilon > 0$

Para $t - t_0 = \frac{T}{4}$ fica

$$dn(v \mid \mu) = \sqrt{1 - \mu} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\varepsilon}{2} x_0^2}{1 + \varepsilon x_0^2}}$$

e, como era de esperar

$$x = x_0$$

A solução (24) é válida para as condições iniciais

$$\begin{cases} x_{t = t_0} = 0 \\ \dot{x}_{t = t_0} = \dot{x}_0 \end{cases}$$

e difere daquela correntemente apresentada [3] [4]

$$x = x_0 \, cn\left[\omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon x_0^2} (t - t_0) \mid \mu\right]$$

que supõe ser

$$\begin{cases} x_{t = t_0} = x_0 \\ \dot{x}_{t = t_0} = 0 \end{cases}$$

Na realidade as duas soluções equivalem-se pois [2, pág. 15]

$$cn(u - K(\mu) \mid \mu) = (1 - \mu)^{1/2} \, sd(u \mid \mu)$$

e substituindo o valor de μ

$$(1 - \mu)^{1/2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\varepsilon x_0^2}{2}}{1 + \varepsilon x_0^2}}$$

e a expressão (24) ficaria

$$x = x_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{\varepsilon x_0^2}{2}}{1 + \varepsilon x_0^2}} \frac{sn\left[\omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon x_0^2} (t - t_0) \mid \mu\right]}{dn\left[\omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon x_0^2} (t - t_0) \mid \mu\right]} =$$

$$= x_0 \, cn\left[\omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon x_0^2} (t - t_0) - K(\mu) \mid \mu\right] \tag{24'}$$

Quer dizer, a expressão (24) corresponde a um coseno elíptico desfasado de $^1/_4$ de período.

Outro processo de obter as soluções particulares (17) e (24) será substituir as soluções x_0 sn u e x_0 cn u na equação diferencial (4) respectivamente quando $\varepsilon < 0$ e $\varepsilon > 0$, obtendo-se sistemas de duas equações algébricas que resolvidas fornecem imediatamente os valores do argumento (u) e do parâmetro (ξ ou μ respectivamente) [3] [4].

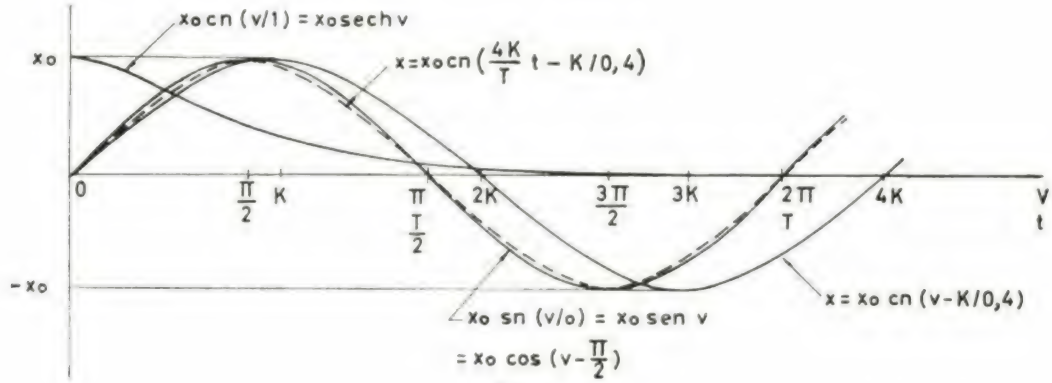


Fig. 12

A representação gráfica do movimento x (t) para $\varepsilon x_0^2 = 4$ ($\mu = 0{,}4$) toma a forma da figura 15, representando-se em abscissa, tal como em relação à figura 9, o argumento v (curvas a cheio) e o tempo t (curvas a traço interrompido).

A velocidade correspondente será

$$v = \dot{x} = x_0 \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2} x_0^2} \left[\frac{\mathrm{cn}\,(v \mid \mu)\, \mathrm{dn}^2\,(v \mid \mu) + \mu\, \mathrm{sn}^2\,(v \mid \mu)\, \mathrm{cn}\,(v \mid \mu)}{\mathrm{dn}^2\,(v \mid \mu)} \right]$$

$$= x_0 \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2} x_0^2}\, \frac{\mathrm{cn}\,[\omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon x_0^2}\,(t - t_0) \mid \mu]}{\mathrm{dn}^2\,[\omega_0^2 \sqrt{1 + \varepsilon x_0^2}\,(t - t_0) \mid \mu]} \qquad (25)$$

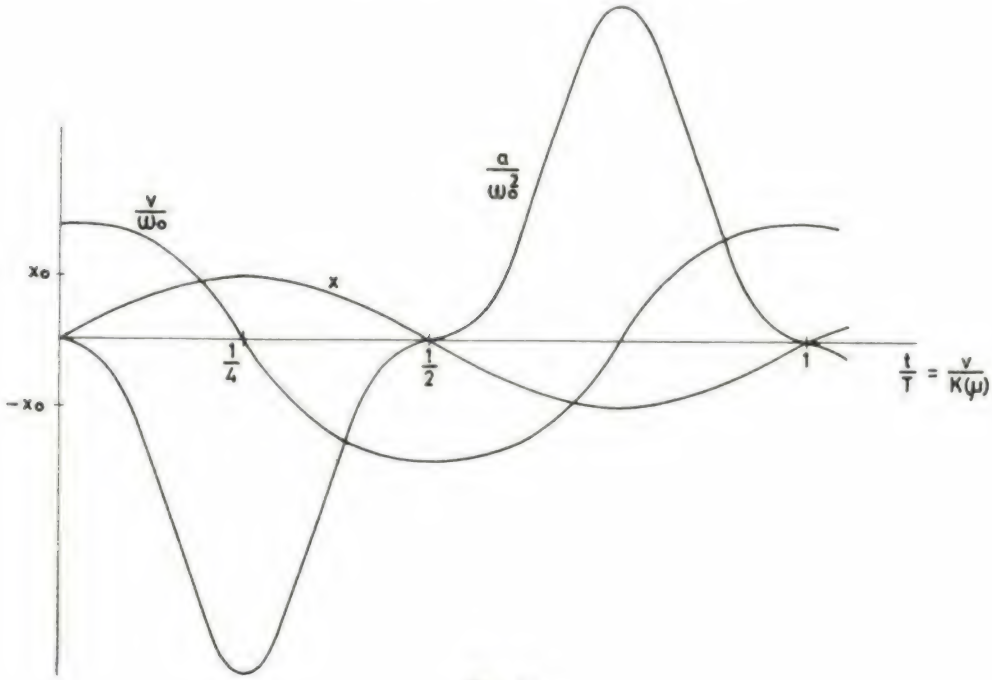


Fig. 13

ou

$$v = -x_0 \omega_0 \sqrt{1+\varepsilon x_0^2}\, \mathrm{sn}\,[\omega_0 \sqrt{1+\varepsilon x_0^2}\,(t-t_0) - K(\mu) \mid \mu]\, \mathrm{dn}\,[\omega_0 \sqrt{1+\varepsilon x_0^2}\,(t-t_0-K(\mu) \mid \mu] \tag{25'}$$

A aceleração virá

$$a = \dot{v} = -x_0 \omega_0^2 \sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2} x_0^2}\, \sqrt{1+\varepsilon x_0^2} \left[\frac{\mathrm{sn}(v \mid \mu)\, \mathrm{dn}^2(v \mid \mu) - 2\mu\, \mathrm{cn}^2(v \mid \mu) . \mathrm{sn}(v \mid \mu)}{\mathrm{dn}^2(v \mid \mu)} \right]$$

$$= -x_0 \omega_0^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} x_0^2\right) \mathrm{sn}(v \mid \mu) \frac{1+\xi\, \mathrm{cn}^2(v \mid \mu)}{\mathrm{dn}^3(v \mid \mu)} \tag{26}$$

ou

$$a = -x_0 \omega_0^2 (1+\varepsilon x_0)\, \mathrm{cn}\,(v - K(\mu) \mid \mu)\, [\mathrm{dn}^2(v - K(\mu) \mid \mu) - \mu\, \mathrm{sn}^2(v - K(\mu) \mid \mu)] \tag{26'}$$

As curvas $v(t)$ e $a(t)$ estão representadas na fig. 13 para $\varepsilon x_0^2 = 4$ $(\mu = 0{,}4)$.

Tal como em (20) a curva $v(x)$, será

$$\frac{v^2}{\omega_0^2 x_0^2} + \left[1 + \frac{1}{2} \varepsilon x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right] \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon x_0^2\right) \tag{20'}$$

Na figura 14 apresenta-se a curva velocidade-trajectória para $\varepsilon x_0^2 = 4$.
Da expressão (22) obtemos a curva $f(\varepsilon x_0^2)$ representada na fig. 11.

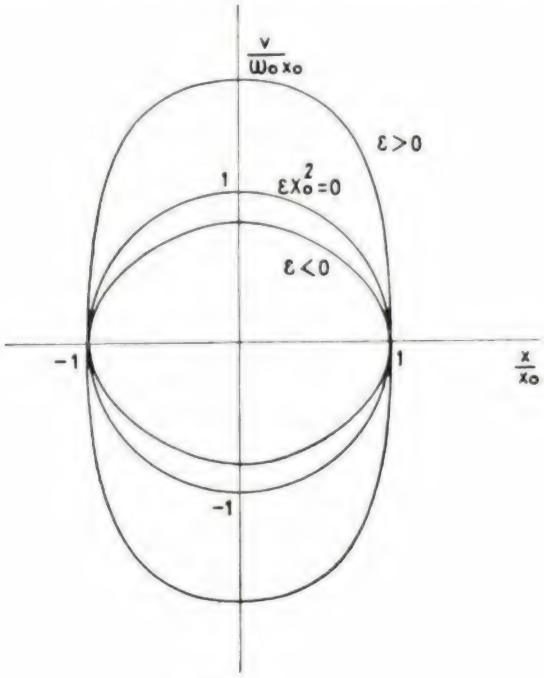


Fig. 14

2.5. *Caso das molas assimétricas macias na compressão e duras na tracção, ou vice-versa*

Neste caso há que considerar a expressão da força elástica nos ramos positivo e negativo, respectivamente:

$$\begin{array}{lll} F_1(x) = k_1(x + \varepsilon_1 x^3) & x > 0 & \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 > 0 \\ \varepsilon_2 < 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 < 0 \\ \varepsilon_2 > 0 \end{array} \right. \\ F_2(x) = k_2(x + \varepsilon_2 x^3) & x < 0 & \end{array} \tag{27}$$

k_1 e k_2 podem ser eventualmente diferentes (o que torna a função $F(x)$ de derivada descontínua na origem).

De acordo com o teorema enunciado em 2.2, suponhamos dois sistemas cujas equações das forças são

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + F_1(x) &= 0 \\ m\ddot{x} + F_2(x) &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

a que correspondem as frequências $f_1(U_0)$ e $f_2(U_0)$ determináveis pelas expressões (22) e (15) ou vice-versa, consoante (27) supõe a 1.ª ou 2.ª hipóteses.

$$f(U_0) = \frac{2}{\dfrac{1}{f_1(U_0)} + \dfrac{1}{f_2(U_0)}}$$

Substituindo valores vem, respectivamente

$$\frac{f(U_0)}{f_0} = \frac{\pi}{\dfrac{K(\mu)}{\sqrt{1+\varepsilon_1 x_{01}^2}} + \dfrac{K(\xi)}{\sqrt{1+{}^1/_2\,\varepsilon_2 x_{02}^2}}}$$

ou

$$\frac{f(U_0)}{f_0} = \frac{\pi}{\dfrac{K(\xi)}{\sqrt{1+{}^1/_2\,\varepsilon_1 x_{01}^2}} + \dfrac{K(\mu)}{\sqrt{1+\varepsilon_2 x_{02}^2}}} \tag{29}$$

As amplitudes x_{01} e x_{02}, respectivamente do ramo positivo e do ramo negativo, relacionam-se tendo em atenção que

$$U_0 = \frac{k_1}{2} x_{01}^2 \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 x_{01}^2\right) = \frac{k_2}{2} x_{02}^2 \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 x_{02}^2\right)$$

ou ainda

$$2\left[1 - \frac{k_2}{k_1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)^2\right] + \left[\varepsilon_1 x_{01}^2 - \frac{k_2}{k_1}\varepsilon_2 x_{02}^2\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)^2\right] = 0 \tag{30}$$

e já não tem sentido exprimir a frequência em função da amplitude do deslocamento, a menos que e defina o ramo em que se considera.

O movimento será descrito no ramo positivo pelas expressões (24) ou (17) consoante é $\varepsilon_1 > 0$ ou $\varepsilon_1 < 0$ e fazendo $x_0 = x_{01}$ e $\varepsilon = \varepsilon_1$, e no ramo negativo pelas expressões (17) ou (24) consoante $\varepsilon_2 < 0$ ou $\varepsilon_2 > 0$ e fazendo $x_0 = x_{02}$ e $\varepsilon = \varepsilon_2$. No exemplo da figura 15 fez-se $k_1 = k_2$, $\varepsilon_1 = -20\,\varepsilon_2$, $x_{01}^2 = 3\left(\mu = \frac{3}{8}\right)$ determinando-se em (30) $\varepsilon_2 x_{02}^2 = 0{,}5\left(\xi = \frac{1}{3}\right)$ e $x_{02} = 1{,}822\, x_{01}$.

As curvas de velocidade e aceleração obtêm-se reunindo as fórmulas (18) e (25), e (19) e (26) respectivamente (fig. 15 — mesmos dados).

A curva velocidade - trajectória obtém-se considerando as expressões (20) e (20') tomando em atenção que na primeira é $\omega_0 = \omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ e $\varepsilon = \varepsilon_1$, e vale para $x \geqslant 0$, enquanto que na segunda é $\omega_0 = \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$ e $\varepsilon = \varepsilon_2$, e vale para $x \leqslant 0$ (fig. 16, mesmo exemplo que na fig. 15).

Quando a amplitude tender para zero $(U_0 \to 0)$

$$f(U_0) \longrightarrow f_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

desde que $k_1 = k_2$ como normalmente sucede, ou

$$f_0 = \frac{4\pi}{\omega_{01} + \omega_{02}}$$

no caso geral de ser $k_1 \neq k_2$.

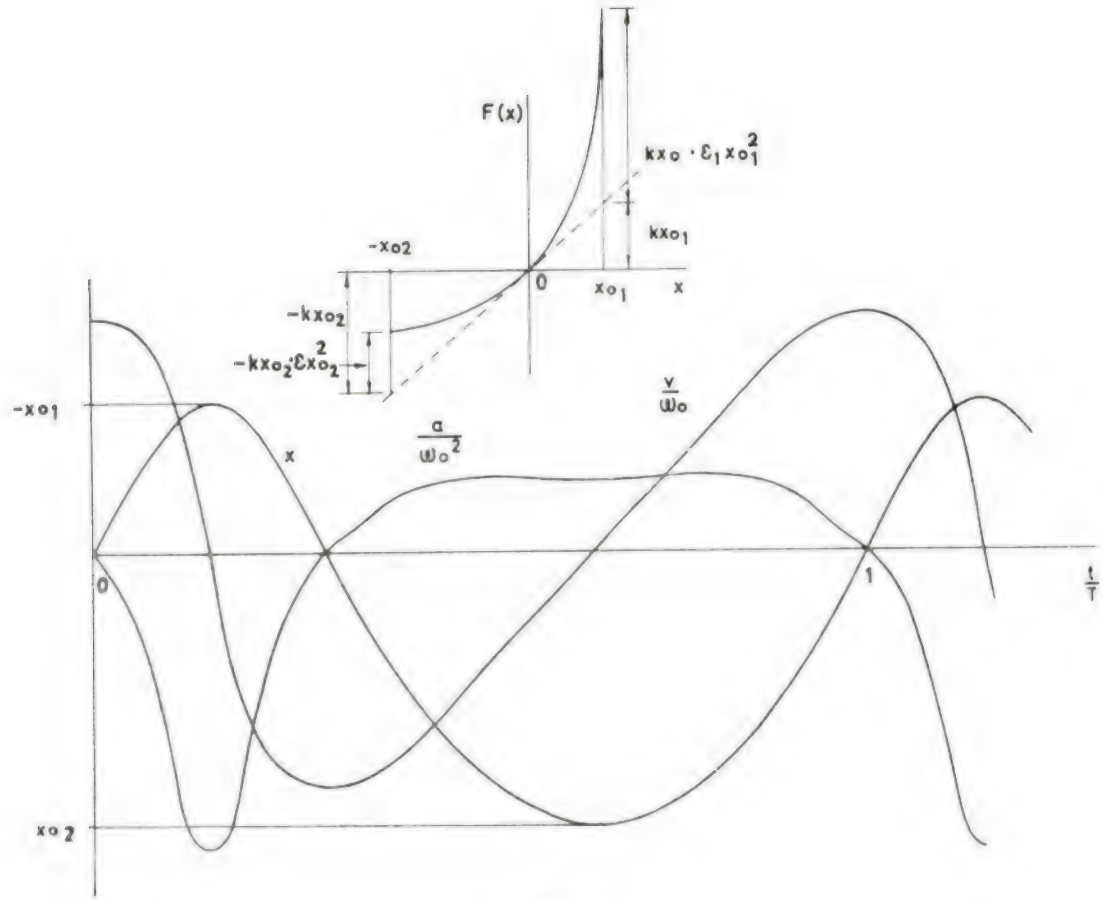


Fig. 15

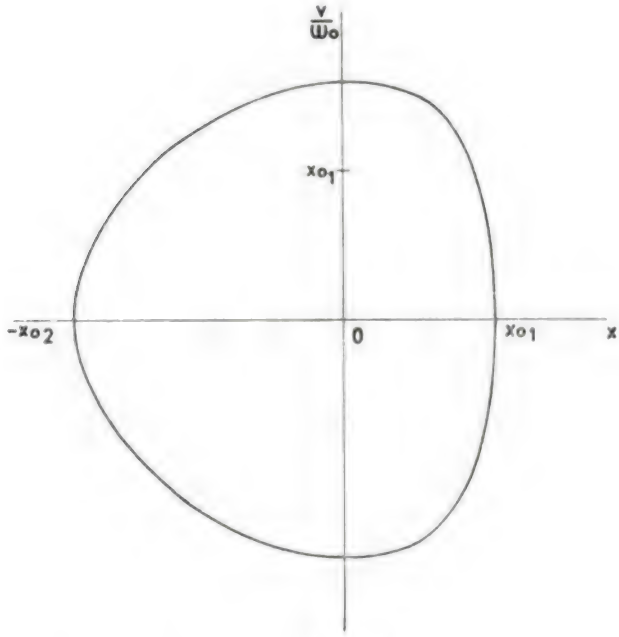


Fig. 16

A família de curvas f $\left(U_{01}, \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$ representa-se na fig. 17, podendo determinar-se imediatamente as amplitudes para valores de ε_1 em função de $\varepsilon_2 < 0$.

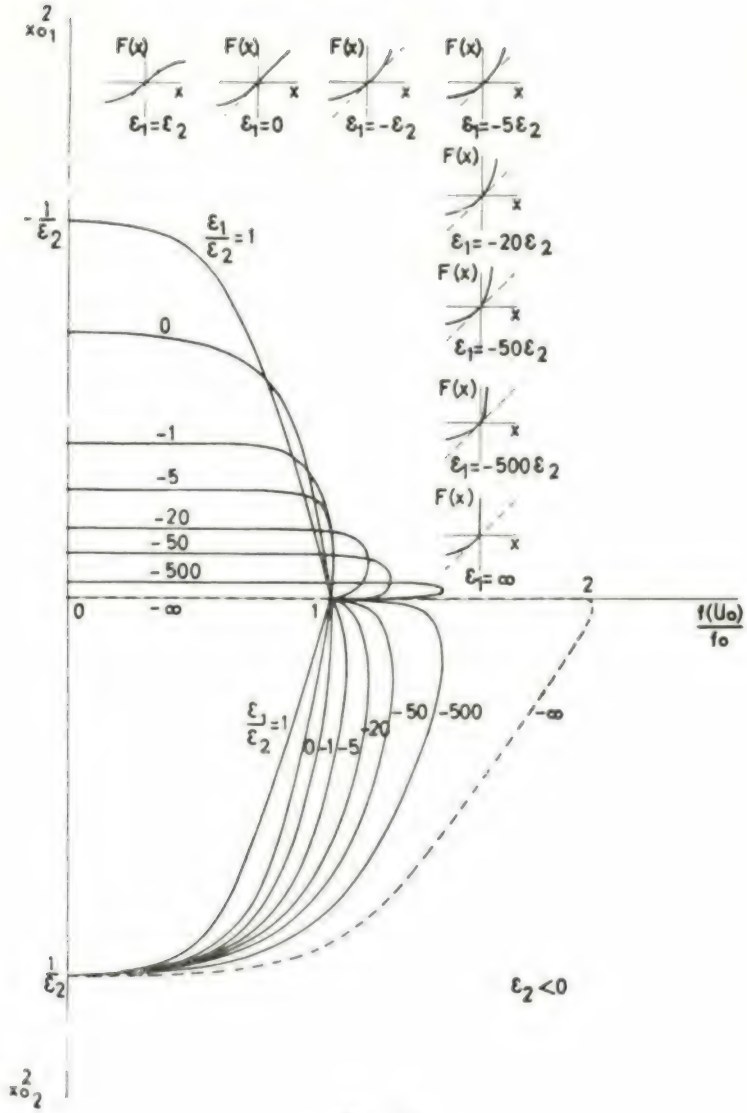


Fig. 17

2.6. *Caso das molas assimétricas duras ou macias*

Agora (27) fica

$$\begin{array}{ll} F_1(x) = k_1(x + \varepsilon_1 x^3) & x \geqslant 0 \\ F_2(x) = k_2(x + \varepsilon_2 x^3) & x \leqslant 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_2 \neq \varepsilon_1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 0 \\ \varepsilon_2 \neq \varepsilon_1 \end{array} \right. \tag{31}$$

A equação (30) é ainda necessária para determinar as amplitudes, e a frequência (29) obtém-se considerando as expressões (22) ou (15), consoante as molas são duras ou macias, para a determinação dos valores de $f_1(U_o)$ e $f_2(U_o)$.

Do mesmo modo que em 2.5 se determina a frequência quando a amplitude tende para zero.

O movimento será descrito no ramo positivo e no ramo negativo por duas expressões do tipo (24) para $x_o = x_{o1}$ e $\varepsilon = \varepsilon_1$, e $x_o = x_{o2}$ e $\varepsilon = \varepsilon_2$ respectivamente, ou por duas expressões do tipo (17) para $x_o = x_{o1}$ e $\varepsilon = \varepsilon_1$, e $x_o = x_{o2}$ e $\varepsilon = \varepsilon_2$ respectivamente, consoante se trate de molas duras ou molas macias.

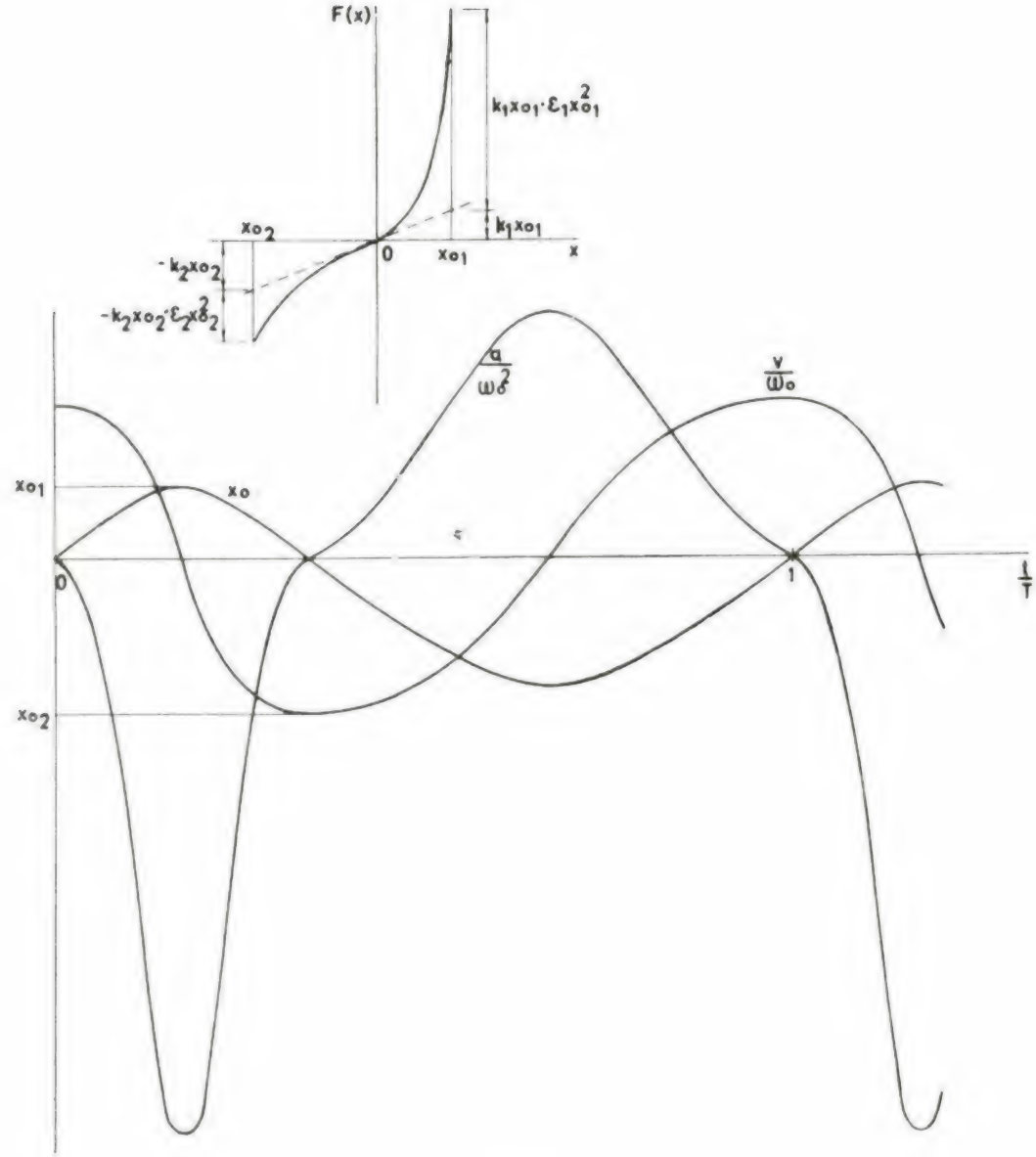


Fig 18

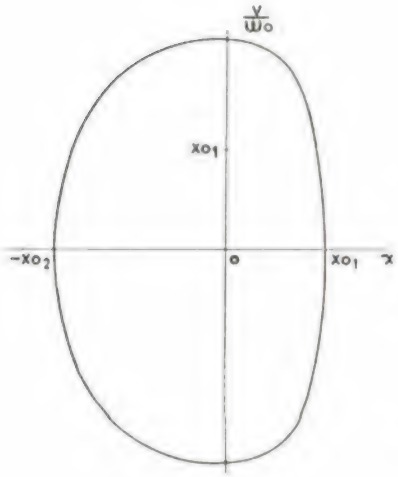


Fig. 19

Na fig. 18 é $k_1 = k_2$, $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 20$, $\varepsilon_2 x_{o2}^2$ (μ

portanto (30) $\varepsilon_1 x_{o1}^2 = 6{,}82$ ($\mu_1 = 0{,}436$) e $\frac{x_{o2}}{x_{o1}} = 1{,}71$.

As curvas v(t) e a(t) obtêm-se como anteriormente reunindo as fórmulas (25) (ou (18)) e (26) (ou (19)) respectivamente (fig. 18, mesmo exemplo).

A curva v(x) determina-se tal como em 2.5. (fig. 19, mesmo exemplo).

A família $f\left(U_o, \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$ representa-se, na figura 20 para valores

$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \geqslant 0$ e $\varepsilon_2 > 0$, e na figura 17 para valores $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \geqslant 0$ e $\varepsilon_2 < 0$ $\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 0 \text{ a } \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1\right)$.

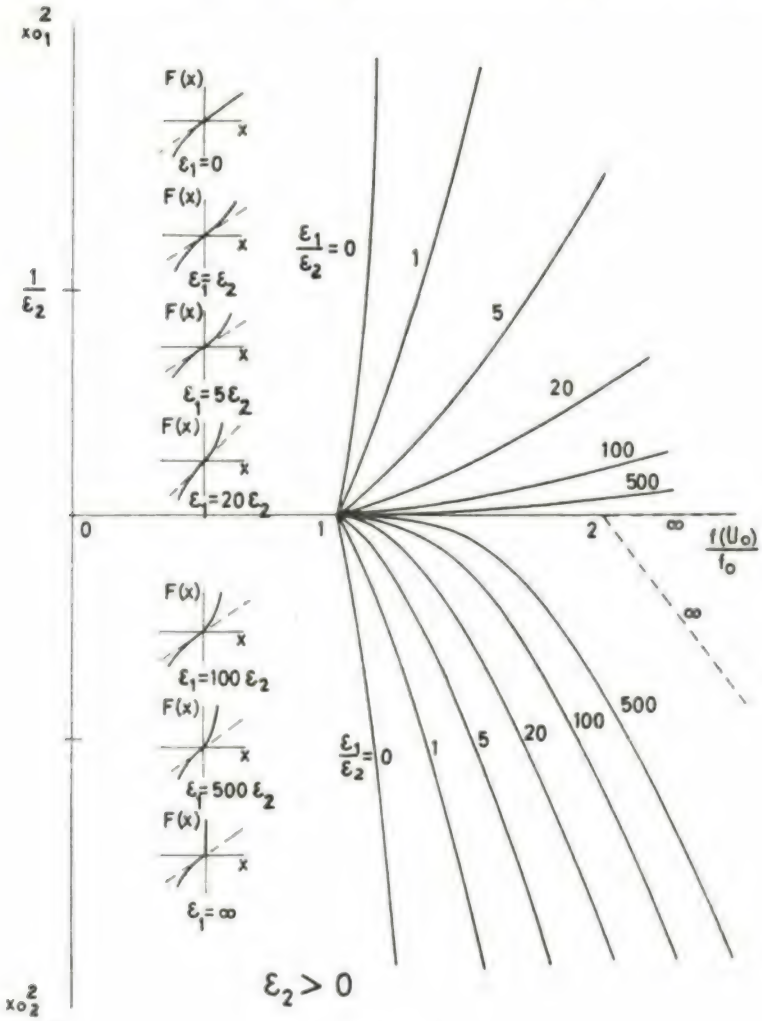


Fig. 20

2.7. *Caso das molas assimétricas com um ramo linear*

É um caso particular de 2.6 em que em (31) se faz ε_1 ou $\varepsilon_2 = 0$.
A equação (30) fica

$$2\left[\frac{k_1}{k_2}\left(\frac{x_{01}}{x_{02}}\right)^2 - 1\right] - \varepsilon_2\, x_{02}^2 = 0 \quad \text{para } \varepsilon_1 = 0$$

ou (34)

$$2\left[1 - \frac{k_2}{k_1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)^2\right] + \varepsilon_1\, x_{01}^2 = 0 \quad \text{para } \varepsilon_2 = 0$$

A frequência no ramo linear é de obtenção imediata

$$f_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} \quad \text{para } \varepsilon_1 = 0$$

ou

$$f_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} \quad \text{para } \varepsilon_2 = o$$

e (29) fica

$$\frac{f(U_o)}{f_o} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2} + \frac{K(\mu)}{\sqrt{1+\varepsilon x_0^2}}} \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = 0\,,\ \varepsilon = \varepsilon_2 > 0 \text{ ou} \\ \varepsilon = \varepsilon_1 > 0\,,\ \varepsilon_2 = 0 \end{cases}$$

ou (35)

$$\frac{f(U_o)}{f_o} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2} + \frac{K(\xi)}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\varepsilon x_0^2}}} \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = 0\,,\ \varepsilon = \varepsilon_2 < 0 \text{ ou} \\ \varepsilon = \varepsilon_1 < 0\,,\ \varepsilon_2 = 0 \end{cases}$$

Tal como em 2.5 se determina a frequência quando a amplitude tende para zero.

O movimento será descrito no ramo linear pela expressão clássica

$$x = x_o \text{ sen } [\omega_o (t - t_o)]$$

e no ramo não linear por uma expressão da forma (17) ou (24). Na figura 21 fez-se $k_1 = k_2$, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 x_{02}^2 = -0{,}4$ ($\xi = 0{,}25$) determinando-se (34) $\left(\frac{x_{01}}{x_{02}}\right)^2 = 0{,}8$.

Em relação às velocidades e acelerações, as respectivas expressões para o ramo linear serão

$$v = \dot{x} = x_o\, \omega_o \cos [\omega_o (t - t_o)]$$

$$a = \ddot{x} = -\ x_o\, \omega_o^2 \text{ sen } [\omega_o (t - t_o)]$$

e as do ramo não linear serão (18) (ou (25)) e (19) (ou (26)), respectivamente (fig. 21, mesmo exemplo).

A curva v(x) obtém-se reunindo a fórmula (20) com a fórmula clássica

$$\frac{v^2}{\omega_o^2} + x^2 = x_o^2$$

válidas para os valores de x que correspondem ao ramo não linear e ao ramo linear, respectivamente (fig. 22).

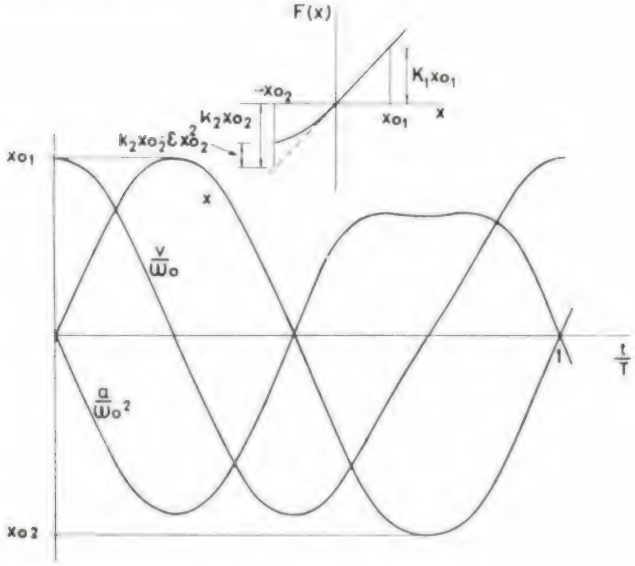


Fig. 21

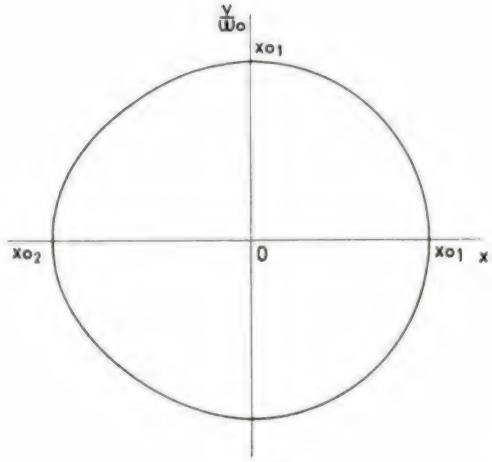


Fig. 22

A curva das frequências f (U_o) apresenta-se na fig. 17 ($\varepsilon_1 = 0$) para o ramo não linear macio ou na fig. 20 ($\varepsilon_1 = 0$) para o ramo não linear duro.

* * *

Em trabalho posterior abordar-se-á o problema dos sistemas deste tipo em regime forçado.

* * *

Desejamos expressar ao Engenheiro Gouvêa Portela, Professor do I. S. T., os nossos agradecimentos pela discussão do presente trabalho.

BIBLIOGRAFIA

[1] — Jahnke, E., e Emde, F. — Tables of Functions with Formulæ and Curves — Dover Publications, New-York, 1945.

[2] — Milne — Thomson, L. M. — Jacobian Elliptic Function Tables — Dover Publications, New York, 1950.

[3] — Mc Lachlan, N. W. — Ordinary Non-linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences — Clarendon Press, Oxford, 1956.

[4] — Hsu, C. S. — On the Application of Elliptic Funtions in Non-linear Forced Oscillations — Quarterly of Applied Mathematics, Jan, 1960.

[5] — Portela, A. G. — Máquinas Alternativas I — Edição da A. E. I. S. T., 1961.

[6] — Stoker, J. J. — Nonlinear Vibrations — Interscience Publishers, Inc, New York, 1950.

[7] — Harris, C. M., e Crede, C. E. — Shock and Vibration Handbook — Mc Graw-Hill Book Company, Inc, New York, 1961.

[8] — Hartog, J. P. den — Vibrations Mecaniques — Dunod, Paris, 1960.

[9] — Jacobsen, L. S., e Ayre, R. S. — Engineering Vibrations — McGraw Hill Book Company, Inc, New York, 1958.

[10] — Klotter, K. — Steady State Vibrations in Systems Having Restoring and Arbitrary Damping Forces — Proceedings of the Symposium on Non linear Circuit Analysis — Polytechnic Institute Of Brooklyn, New York, 1953.

[11] — Ojalvo, I. U., e Bleckman, G. L. — On Duffing's Equation — Journal of Applied Mechanics, March, 1961.

[12] — Bogoliubov, N. N. e Mitropolsky, Y. A. — Les Méthodes Asymptotiques en Théorie des Oscillations Non linéaires — Gauthier — Villars et Cie, Paris, 1962.

[13] — Frisch-Fay, R. — Applications of Approximate Expressions for Complete Elliptic Integrals — International Journal of Mechanical Sciences, July, 1963.

[14] — Struble, R. A. Nonlinear Differential Equations — McGraw-Hill Book Company, Inc, New York, 1962.

SUMÁRIO

O autor propõe um teorema que permite determinar as frequências de sistemas vibratórios livres com elasticidade assimétrica, a partir dos valores das frequências de sistemas com elasticidade anti-simétrica, por meio de uma fórmula simples Deduz as expressões correntes para os sistemas com elasticidade anti-simétrica do tipo Duffing e, com base no referido teorema, generaliza para sistemas com elasticidade assimétrica em que os ramos são ainda do tipo Duffing. Apresenta algumas curvas de deslocamento, velocidade e aceleração referidas a exemplos concretos, bem como as famílias de curvas de frequências em função das amplitudes e do factor de não linearidade.

SUMMARY

From the values of anti-simetrical elastic systems, the Author proposes in this, article a theorem wich is able to calculate te frequencies of free-oscillating systems with assimetrical elasticity, by means of easy formulaes.

The more usual expressions for the anti-simetrical elastic systems of the Duffing type, are deduced and are generalized for the assimetrical elastic systems, still of Duffing kind, basing himself on the above mentioned theorem.

Also are presented a few graphs of the motion path, velocity, and aceleration concerning some pratical values, as well as family of frequencies curves refered to amplituds and non-linearity factor.

C. D. U. 621.311.5/91

Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional

— Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.)

NOTA: *As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 °/₀ dos totais do País.*

I — Breve nota mensal

No aspecto hidrológico, o mês de Setembro apresentou-se, no conjunto, bastante abaixo da média. No dia 26 entrou em paralelo pela primeira vez o Grupo II de 62,5 MVA da central térmica da Tapada do Outeiro, o qual iniciou um período de ensaios.

II — Elementos gerais (GWh)

a) Mensais

	1962	1963	Variação °/₀
Produção hidráulica (P_h) . . .	253,6	260,9	+ 3
Produção térmica (P_t)	26,1	24,8	— 5
Produção total (P_T)	279,7	285,7	+ 2
Exportações (Ex)	0,0	7,1	—
Importações (I)	0,0	0,0	— 0
Produção para consumos não perman. (P_{cnp})	42,9	16,5	— 62
Produção para consumos permanentes (P_{cp}) (1)	236,8	262,1	+10,7 (2)
Coeficiente de hidraulicidade	0,98	0,94	—

b) Acumulados desde 1 de Janeiro

	1962	1963	Variação °/₀
Produção hidráulica (P_h) . . .	2664,2	2917,7	+ 10
Produção térmica (P_t)	55,6	91,5	+ 65
Produção total (P_T)	2719,8	3009,2	+ 11
Exportações (Ex)	0,0	54,0	—
Importações (I)	0,6	0,1	— 83
Produção para consumo não perman. (P_{cnp})	559,4	565,6	+ 1
Produção para consumos permanentes (P_{cp}) (1)	2161,0	2389,7	+10,6 (2)
Coeficiente de hidraulicidade	1,12	1,40	—

NOTAS:

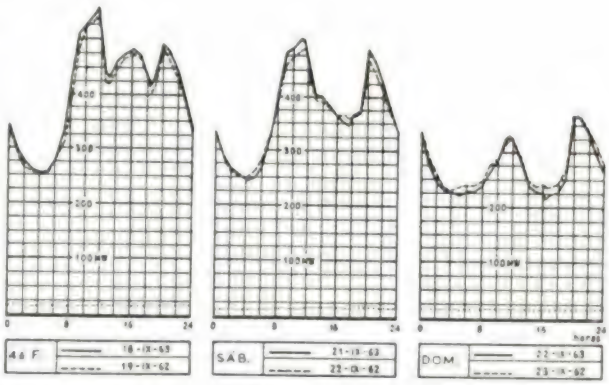
(1) A produção para consumos permanentes (P_{CP}) é determinada pela seguinte expressão: $P_{CP} = P_T - P_{cnp} + 1 - E_X$

(2) O aumento percentual de produção para consumos permanentes, tendo em conta a incidência dos domingos e dias especiais, é respectivamente de 11,0 °/₀ e 10,2 °/₀.

III — Diagramas de carga dos dias característicos

				4.ª feira: 1962	4.ª feira: 1963
Produção hidráulica		(P_h)	MWh	8751	8840
Produção térmica		(P_t)	MWh	1047	1000
Produção total		(P_T)	MWh	9748	19940
Trocas com Espanha	Export.	(Ex)	MWh	0	0
	Import.	(I)	MWh	0	0
TOTAL		$P_T + (I-E_X)$	MWh	9798	9940
Prod. para cons. perm.		(P_{cp})	MWh	8674	9552
Prod. para cons. não perm.		(P_{cnp})	MWh	1124	388
Características dos diagramas	$P_T + (I-E_X)$	Potência máx.	MW	541,5	555
		Potência mín.	MW	250,0	251
		Utiliz. da ponta	horas	18,1	17,9
		Factor de carga		0,75	0,75
	P_{cp}	Potência máx.	MW	493	538
		Potência mín.	MW	202	233
		Utiliz. da ponta	horas	17,6	17,8
		Factor de carga		0,73	0,74

SETEMBRO



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

Albufeiras:	No fim do mês: GWh	No fim do mês: °/₀ (1)
Paradela	63,8	28,7
Venda Nova	45,9	35,9
Salamonde	18,7	67,8
Caniçada	19,4	58,6
Cabril	111,1	32,7
Castelo do Bode	75,2	46,1
Guilhofrei	5,5	66,3
Lagoa Comprida	15,8 (2)	45,9
Santa Luzia	34,5	56,0
Pracana	1,8	14,0
Póvoa	8,4 (3)	56,7
Total . . .	400,1	38,4

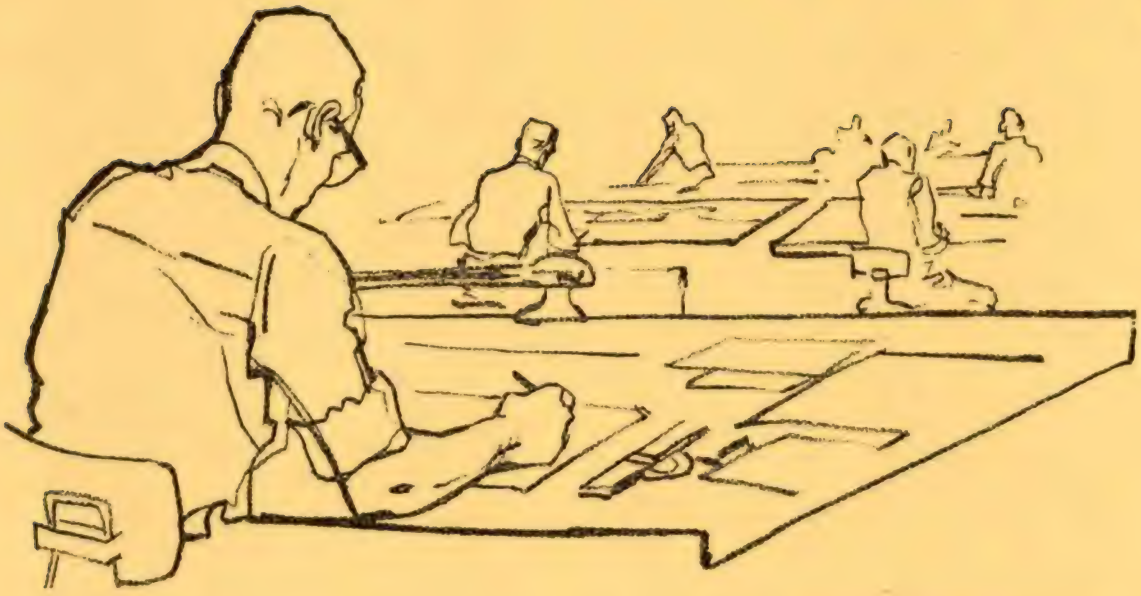
Notas:

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 2,9 GWh armazenados em Vale do Rossim no início do mês e 2,3 GWh no fim do mês.

(3) Inclui 2,7 GWh armazenados no açude do Poio no início do mês e 2,5 GWh no fim do mês.

APA



CATERPILLAR* + S.T.E.T.

O BINÓMIO MAIS VANTAJOSO PARA QUALQUER PROBLEMA DE MOVIMENTAÇÃO DE TERRAS

CATERPILLAR* O fabricante mais especializado, em todo o mundo, de tractores de rasto e de rodas, pás mecânicas de rasto e rodas (traxcavators*), motoniveladoras, moto-scrapers, escarificadores, "bulldozers", motores industriais e marítimos, grupos electrogéneos.

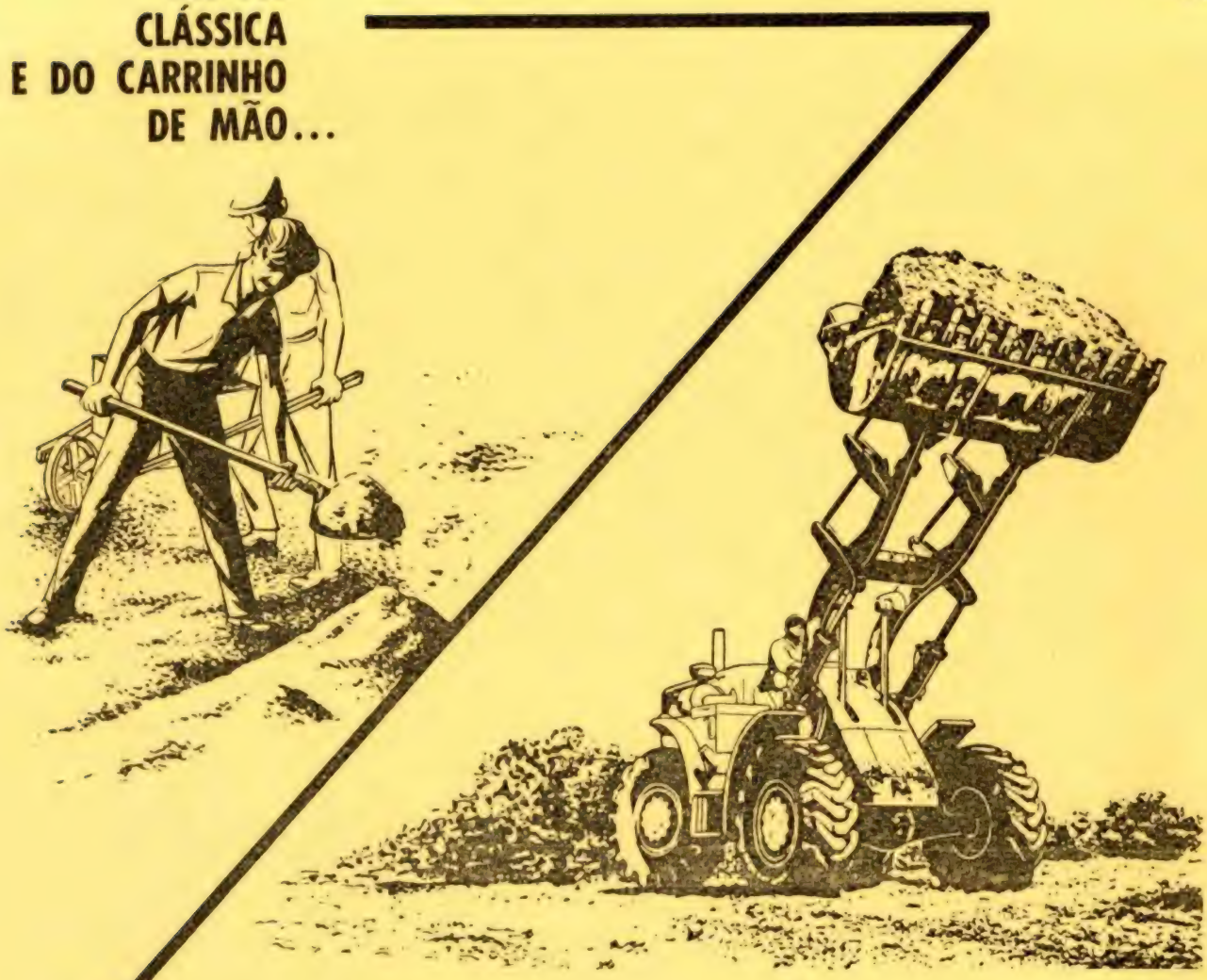
S.T.E.T. **SOCIEDADE TECNICA DE EQUIPAMENTOS E TRACTORES, S.A.R.L.**

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO EM PORTUGAL CONTINENTAL, ILHAS ADJACENTES, CABO VERDE E GUINÉ

ASSISTÊNCIA – REPARAÇÕES – PEÇAS GENUÍNAS

PRIOR VELHO — SACAVÉM
TELEF.: 251 0001/4 — TELEG.: «STETRA» — APARTADO 1351
LISBOA

* «CATERPILLAR» E «TRAXCAVATOR» SÃO MARCAS REGISTADAS DE CATERPILLAR TRACTOR CO. – PEORIA, ILLINOIS – E. U. A.



TODO UM CAMINHO PERCORRIDO NA PROCURA DA MELHOR REALIZAÇÃO DO TRABALHO — DA MANEIRA MAIS EFICIENTE, MAIS ECONÓMICA E MAIS LUCRATIVA — PARA UMA MELHOR SATISFAÇÃO DAS NECESSIDADES HUMANAS.

ACTUALMENTE, EM QUALQUER TRABALHO DE

cerâmicas, minas e pedreiras,

A PALAVRA DA ORDEM É

CATERPILLAR*

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO:

S.T.E.T.

SOCIEDADE TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS E TRACTORES, S.A.R.L.
PRIOR VELHO — SACAVÉM
TELEF. 2510001/4 — TELEG. «STETRA» — APARTADO 1351 — LISBOA

* «CATERPILLAR» E «TRAXCAVATOR» SÃO MARCAS REGISTADAS DE CATERPILLAR TRACTOR CO. — PEORIA, ILLINOIS — E. U. A.

C. D. U. 669 ... 8

Princípios Científicos da Formação de Películas

POR MARIA FERNANDA DE CASTRO
Estagiária para especialista
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

1 — INTRODUÇÃO

No seu aspecto mais simples, os processos de formação de películas compreendem apenas um conjunto de fenómenos que provocam a conversão de filmes no estado líquido ao estado sólido. Evidentemente que envolve esta transformação reacções muito mais complexas do que esta definição simplista pode fazer prever e dependentes até do tipo de película em estudo.

Na realidade, a formação de películas, quer com compostos de elevado peso molecular, quer com compostos de baixo peso molecular, pode conduzir-se por diferentes vias, como por exemplo a coagulação no caso de soluções, coalescência no caso de latexes ou evaporação de solventes na hipótese de soluções contendo solventes voláteis.

Será mesmo possível dizer-se que estes processos de formação de películas se poderão considerar agrupados em dois tipos diferentes :

— por evaporação de solvente
— por polimerização

muito embora frequentemente se verifique a existência simultânea de fenómenos de evaporação de solventes e de transformação química (polimerização), desde que se criem as condições indispensáveis quer no que respeita ao composto em causa (bi ou poli-funcionalidade) quer exógenas (temperatura, catalizador, etc.).

Assim no estudo dos diferentes materiais geradores de películas, poderão encarar-se, de acordo com a sua estrutura molecular, materiais não transformáveis, transformáveis e respectivos tipos intermediários.

Compreendem as substâncias formadoras de películas não transformáveis :

a) — Compostos de baixo peso molecular, principalmente monómeros — constituídos fundamentalmente por resinas naturais, tais como a colofónia, «shellac», etc.

b) — Compostos de baixo peso molecular, já com um pequeno grau de policondensação (resinas novolaca e gliptais).

c) — Compostos de elevado peso molecular — polímeros de grau de condensação muito elevado, como o poliestireno, clorovinílicas, ésteres de celulose, etc.

As substâncias transformáveis formadores de películas são de elevada importância e podem, por sua vez, antes da formação do filme, isto é, da secagem, apresentar-se sob a forma de :

a) — *monómeros*
b) — *produtos de condensação de baixo peso molecular*
c) — *polímeros de cadeia de elevado peso molecular*

Os óleos sicativos vegetais constituem exemplo das substâncias do primeiro destes tipos, ao passo que determinados óleos oxidados ou resóis de fenol-aldeído (com grau de policondensação inferior a 10) ilustram o segundo caso. O último tipo de substâncias formadores de película, transformáveis e de elevado peso molecular, é o que engloba a maioria dos casos — por assim dizer, todos os polímeros de cadeia insaturada e, actualmente os polímeros lineares saturados que podem transformar-se em polímeros tri-dimensionais.

Os tipos intermediários compreendem, como é óbvio, misturas de substâncias formadores de películas daqueles dois grupos.

2 — FORMAÇÃO DE PELÍCULAS SEM TRANSFORMAÇÃO QUÍMICA (por evaporação do solvente)

2.1 — *Generalidades*

O estudo do mecanismo de formação de películas para este tipo de materiais que incluem, como se mencionou, os ésteres de celulose, os

clorovinílicos, os polibutilmetacrilatos e muitos outros baseia-se nas seguintes considerações :

a) — A estrutura da maioria dos polímeros de cadeia e das resinas de baixo peso molecular é amorfa (líquida).

b) — As cadeias moleculares apresentam ligações flexíveis.

c) — A evaporação do solvente origina a passagem para o estado vítreo da substância filmogénea.

Para a obtenção deste tipo de películas sem transformação química, a substância geradora é inicialmente dissolvida num solvente adequado verificando-se que as macromoléculas apresentam a possibilidade de um movimento relativo podendo, por conseguinte, distribuir-se uniformemente sobre a superfície a proteger.

2.2 — *Evaporação do solvente*

A evaporação do solvente acaba por produzir uma vitrificação e a formação de um filme monolítico, cuja dureza aumenta directamente com a quantidade de solvente evaporado. Deverá no entanto notar-se, que a evaporação dum solvente não é completa, permanecendo sempre uma quantidade residual — 5 a 12 %.

Normalmente, o processo de evaporação desenvolve-se em 3 fases: 1) vaporização das moléculas do líquido 2) absorção de algumas moléculas vaporizadas pelo líquido quando chocam contra a superfície 3) difusão de outras moléculas para o meio confinante.

De acordo com a teoria cinética dos gases estabelece-se que o volume do líquido vaporizado por unidade de tempo é dado pela equação

$$V = \frac{\alpha (P - p)}{4\,d} \times \frac{3\,M}{R\,T}\ cm^3/cm^2 seg$$

em que P — pressão de saturação de vapor do solvente na superfície
p — pressão de vapor no meio confinante
d — densidade do líquido
M — viscosidade do líquido
R — constante dos gases
T — temperatura absoluta

α — constante empírica, igual a 1 para solventes de pressão de vapor até 150 mm Hg, caindo a 0,5 a uma pressão de vapor de 440 mm Hg. A velocidade aproximada de evaporação de solvente em g m^2.min. é dada por

$$g = 0{,}0192\ P \sqrt{M}$$

notando-se que para uma mistura de solventes a velocidade de evaporação de cada solvente é diferente da sua velocidade individual e será determinada pela respectiva pressão parcial de vapor que, de acordo com a lei de Raoult, é proporcional à fracção molecular de cada constituinte. A velocidade de evaporação da mistura determina-se pela pressão de vapor de mistura, obtida pela soma das pressões parciais de todos os constituintes

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$$

Estas regras aplicam-se porém limitadamente à evaporação de solventes das soluções, dadas as numerosas interferências possíveis ; por ex : a presença de camadas de espessura monomolecular à superfície do líquido fazem baixar a velocidade de evaporação ; a presença de agentes activadores de superfície ; a existência de pigmentos que em partículas de grandes dimensões aceleram a evaporação, enquanto que finamente pulverizadas ou sob a forma lamelar a retardam (por ex : pó de Al).

2.3 — *Factores que afectam a formação da película*

Dos factores que, no caso em estudo, afectam a constituição da película poderão citar-se os seguintes :

1) — a estrutura da substância filmogénea original ;

2) — a composição do solvente volátil : sua volatibilidade, afinidade para o material formador da película e propriedades físico-químicas ;

3) — a composição e quantidade de solventes de baixa volatibilidade, plastificantes e outros líquidos constituintes, que determinam as propriedades do produto final ;

4) — as propriedades da solução : concentração, viscosidade, temperatura e tempo de armazenagem da tinta ;

5) — as condições de formação da película :

superfície específica utilizável pela evaporação, grau de saturação do meio ambiente com respeito aos vapores de solvente volátil, temperatura, agitação e humidade do ar, etc.

3 — FORMAÇÃO DE PELÍCULAS POR POLIMERIZAÇÃO (conversão a polímeros tri-dimensionais)

3.1 — *Generalidades*

Constitui este processo de formação de películas o processo mais importante.

A transformação de monómeros ou de polímeros lineares em polímeros tri-dimensionais resulta, em geral, dos seguintes processos:

a) — policondensação (por exemplo em resois de fenolaldeído, resinas de melamina — ureia, etc.)

b) — polimerização ou copolimerização através de ligações insaturadas situadas nos extremos das cadeias respectivas, quer directamente, quer através da acção do oxigénio; óleos sicativos, resinas sintéticas modificadas a óleo (por exemplo, resinas alquídicas, fenólicas, de ureia, etc.)

Sublinha-se que muitas substâncias geradoras de películas se transformam em polímeros tri-dimensionais por processos que englobam simultâneamente mecanismos de polimerização e policondensação.

3.2 — *Transformação por policondensação*

As mais importantes resinas que, por condensação, podem conduzir à formação de películas constituídas por polímeros tri-dimensionais são as seguintes:

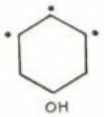
a) — fenol-aldeídos;

b) — ureia — formaldeído ou melamina;

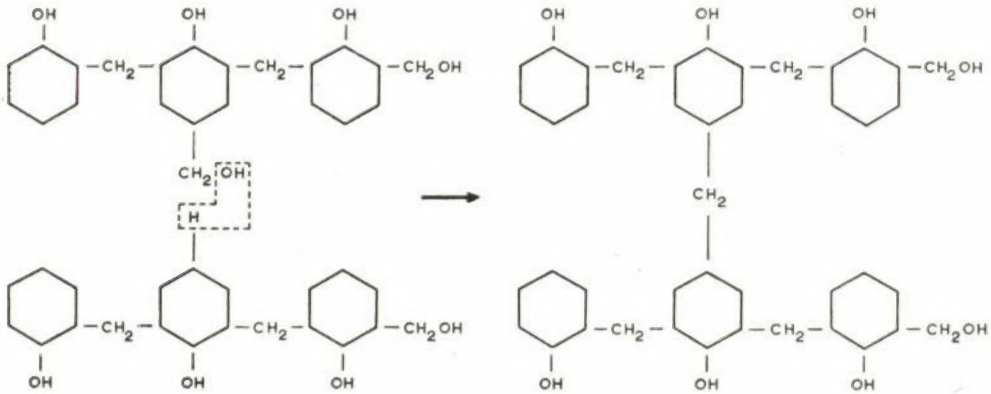
c) — poliesteres.

Em todas estas resinas, a transformação apenas ocorre se os constituintes da condensação se encontram nas proporções equivalentes e contêm pelo menos três grupos funcionais.

Consideremos, por exemplo, as resinas de fenol e aldeído. O fenol é um grupo constituinte tri-funcional, visto que a experiência mostra que a condensação envolve 2 hidrogénios nas posições orto e 1 na posição para



Para que se realize esta reacção, deve obter-se uma proporção de 1,5 — 2 molecula de formaldeído para 1 molecula de fenol. Durante a condensação, inicialmente cada molecula de fenol perde uma molecula de água produzindo uma gama complexa de alcoois fenólicos. Estas cadeias estruturais transformam-se posteriormente num polímero tri-dimensional.



No caso de resinas ureia-formaldeído

$$_2NH_2CONH_2 + {}_3HCHO \rightarrow \underset{\text{monometilolureia}}{HNHCONHCH_2OH} + \underset{\text{dimetilureia}}{H\,NHCONCH_2OH\,(CH_2OH)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[-NHCONHCH_2-\underset{\underset{\boxed{CH_2\boxed{OH}}}{|}}{NCONH}-CH_2-\right]_x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \boxed{H} \\ \left[-\underset{\underset{CH_2OH}{|}}{NCONHCH_2}-\underset{\underset{|}{}}{NCONH}-CH_2-\right]_x \end{array}\right\} \text{resina de estrutura em cadeia}$$

polímero tri-dimensional

$$\begin{array}{l} NHCO-NHCH_2-\underset{\underset{CH_2}{|}}{N}-CONH-CH_2- \\ -\underset{\underset{CH_2}{|}}{NCO}-NHCH_2-\underset{\underset{|}{}}{N}-CONH-CH_2- \end{array}$$

As condensações tri-dimensionais que se desenvolvem durante os procesos de formação de películas diferem da condensação linear nos seguintes aspectos:

1) — As reacções entre 2 ou 3 grupos funcionais de uma cadeia polímera conduzem à formação de uma cadeia tri-dimensional, a uma velocidade tanto maior e a um grau tanto mais elevado, quanto mais rápida e eficiente for a eliminação das moléculas de baixo peso molecular que se formam na reacção.

2) — Durante a transformação, nunca ou quase nunca, os grupos funcionais participam inteiramente na reacção. O produto final — que é tri-dimensional — raras vezes contem menos do que 25 % de grupos por reagir. Todavia estes grupos funcionais remanescentes não possuem a mobilidade inicial, além de que o seu número é tanto menor quanto mais reactivos foram os componentes inicialmente usados.

3) — Os produtos de condensão tri-dimensionais são insolúves e infusíveis, o que torna o seu exame químico extremamente difícil.

Caracteriza-se o desenvolvimento das condensações tri-dimensionais por se efectuar por fases sucessivas, em que os produtos intermediários apresentam diferenciações profundas dos produtos iniciais e final. Assim, e de uma maneira genérica, poderemos considerar nestes tipos de reacções as seguintes fases:

a) — Formação de uma resina solúvel e fusível (de baixo ponto de fusão).

b) — Ramificação gradual das cadeias — a solubilidade desce ràpidamente e o ponto de fusão aumenta.

c) — Conversão de uma percentagem considerável de resina em agregados moleculares tri-dimensionais, constituindo polímeros insolúveis e infusíveis.

A transformação completa da resina, é pràticamente impossível; por exemplo, nos polímeros de fenol-formaldeído encontram-se quantidades consideráveis de resina nos estados de resina solúvel e ramificada.

3.3 — *Transformação por polimerização*

Como se disse, podem obter-se polímeros tri-dimensionais por transformação de monómeros ou polímeros que possuam mais do que uma ligação não saturada ou uma funcionalidade superior a dois.

Pode este tipo de polimerização realizar-se por vias diferentes:

— por reacção e desenvolvimento de um só tipo de monómero, e em que o polímero obtido é constituído apenas por unidades monómeras idênticas (homopolímero).

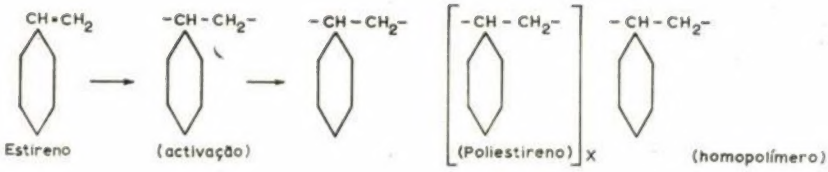
— por reacção e desenvolvimento entre tipos diferentes de unidades monómeras.

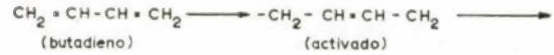
Para esta última hipótese existe ainda a possibilidade de se distinguir entre

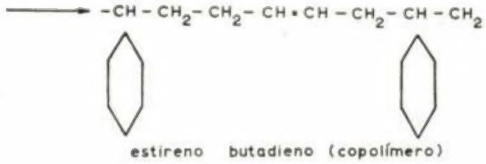
Copolimerização — em que as diferentes unidades monómeras podem, isoladamente, constituir polímeros.

Heteropolimerização — em que uma ou mais unidades monómeras não apresentam essa possibilidade.

Os exemplos destes tipos de polimerização por adição são múltiplos; citamos por ex.





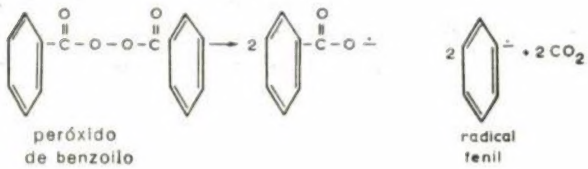


Mecanismo da polimerização — o mecanismo da polimerização por adição tem lugar em três fases: iniciação, propagação e termo. A polimerização é iniciada quando o monómero se torna activo por acção conjunta ou não do calor, luz ou catalizador. Realiza-se assim o crescimento do polímero por adição sucessivas de monómero com uma velocidade que depende das condições de polimerização, tipo e quantidade de catalizador e tipo do monómero.

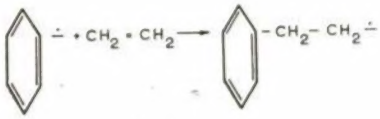
O termo da reacção tem lugar por choque entre as extremidades activas das duas cadeias crescentes, por adição dum terminador tal como um radical livre do catalizador ou solvente, ou ainda por um mecanismo de transferência de cadeia.

Como catalizadores deste tipo de reacções usam-se frequentemente determinados peróxidos.

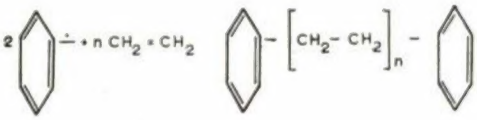
Os peróxidos são compostos relativamente instáveis, cuja decomposição origina radicais livres que fornecem a energia necessária para activar os monómeros, e por conseguinte, iniciar a reacção de polimerização. Apresentamos como exemplo o peróxido de benzoilo, cuja decomposição origina o aparecimento de dois radicais fenil livres e a formação de CO_2



A activação do etileno por um radical fenil pode indicar-se como segue



Crescendo a cadeia por adições sucessivas de etileno, até que termina por um dos processos ou circunstâncias anteriormente apontadas. Quando iniciada e terminada por radicais fenil livres a polimerização do etileno pode indicar-se pela equação



3.4 — *Transformação de polímetros de cadeia saturada*

Poderá incluir-se ainda neste capítulo um aspecto particular da transformação de polímeros de cadeia saturada. Há relativamente pouco tempo julgava-se que polímeros de cadeia saturada não poderiam originar polímeros tri-dimensionais, em virtude da ausência de grupos funcionais activos na sua molécula.

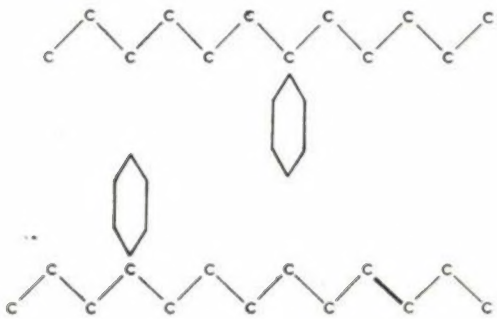
Ùnicamente se usavam polímeros deste tipo na produção de vernizes, em que as películas eram constituídas pela evaporação de solvente, sem qualquer transformação da substância filmogénea (nitrocelulose, polímeros vinil, polímeros de metracrilato, etc.).

Estebeleceu-se todavia, posteriormente, que aquecendo aqueles polímeros sob certas condições se provocava o aparecimento de valências livres nas cadeias saturadas, o que consequente-

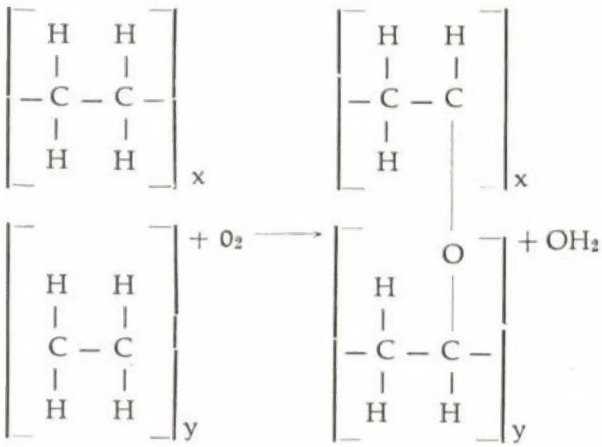
mente abria a possibilidade da obtenção de polímeros tri-dimensionais.

Estas valências livres aparecem como o resultado de se separarem grupos atómicos ou átomos substituídos da molécula polímera quando se aquece a temperaturas inferiores à da respectiva decomposição. A velocidade de separação desses átomos ou grupos depende da estrutura e tamanho dos substitutos na cadeia de carbonos e do modo como se dá a compactação da cadeia.

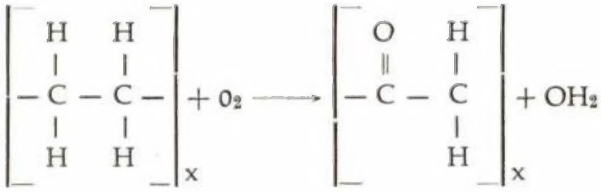
Grupos volumosos, como o do estireno por exemplo, evitam uma compactação eficiente, do que resulta que o poliestireno e muitos dos seus copolímeros se não transformam em polímeros tri-dimensionais.



Já noutros casos, como no polietileno, as moléculas polímeras são bem compactadas e, desde que o hidrogénio do grupo metileno se possa oxidar no ar poderá formar-se um polímero tri-dimensional, para o que é suficiente um aquecimento a 150—200° e se verifique a correspondente oxidação

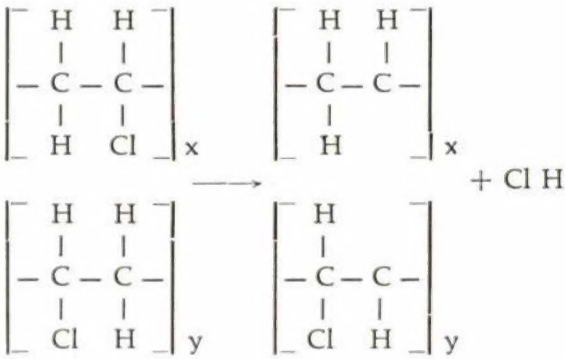


Como sub-produtos podem ainda formar-se nesta reacção grupos carbonilo



Os poliesteres de altos alcoóis, tais como o álcool octílico transformam-se mais ràpidamente em polímeros tri-dimensionais; por sua vez os poliesteres de alcoóis de baixo peso molecular — alcoóis metílico, etílico e isopropílico — são mais resistentes à acção do calor e não dão polímeros daquele tipo.

Determinados polímeros saturados, tais como cloreto de polivinilo, resinas ponivinílicas e de borracha clorada, também se transformam por aquecimento em polímeros tri-dimensionais pela expulsão de um ácido halogenado e consequente obtenção de radicais com ligações cruzadas.



A libertação de Cl H torna este tipo de revestimento não adequado como primários de metais.

Resta-nos ainda citar que a vantagem de películas baseadas em polímeros tri-dimensionais obtidos a partir de polímeros saturados reside fundamentalmente no baixo conteúdo de grupos funcionais que as caracteriza. Por outro lado, os os polímeros tri-dimensionais produzidos por polímeros de cadeia saturada (borrachas) ou por compostos de baixo peso molecular insaturados (óleos) retêm sempre um número considerável de grupos funcionais, tais como duplas ligações. Durante a vida destas películas estas insaturações, por exemplo, oxidam no ar e provocam a mais rápida deterioração da película.

A quantidade de polímero tri-dimensional obtida a partir dum polímero saturado pode controlar-se pela duração do aquecimento de modo a obter-se uma flexibilidade compatível com as aplicações práticas. Tais películas podem encon-